



# Bibliothèque d'exercices

*version 4, octobre 2003*

recueil réalisé par Arnaud Bodin



## Introduction

Afin de faciliter le travail de tous, voici la quatrième version de ce recueil d'exercices. L'esprit n'a pas changé : simplifier le concoctage des feuilles d'exercices par un simple «copier-coller». Je n'ai pas saisi tous les exercices, loin de là, je remercie vivement les «gros» contributeurs :

- Éliane Cousquer ;
- François Gourio ;
- Pierre-Yves Legall ;
- Pascal Ortiz ;
- Franz Ridde.

Sans oublier tous ceux qui m'ont fourni leurs feuilles d'exercices : Jean-François Barraud, Cécile Drouet, Cornélia Drutu, Olivier Gineste, Vincent Guirardel, Jean-Marc Hécart, Arnaud Hilion, Jean-Marie Lescure, Isabelle Liousse, Sylvain Maillot, Nicolas Marco, Bertrand Monthubert, Nadja Rebinguet, Sandrine Roussel, Marie-Hélène Vignal. Qu'ils et elles en soient tous remerciés.

La «bibliothèque» s'agrandie encore : environ 2000 exercices. Les fichiers sources sont disponibles en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, et récupérables à l'adresse suivante :

<http://www-gat.univ-lille1.fr/~bodin/>

Sur ce site, une page permet de récupérer les exercices qui vous intéressent en saisissant leur numéro. Certains exercices sont corrigés (environ 15%), cependant afin des sauver quelques arbres les corrections ne sont pas incluses dans cette version papier. Bien sûr lorsque vous récupérez des exercices pour faire une feuille de TD les corrections existantes sont automatiquement ajoutées en fin de feuille.

Vous pouvez contribuer à ce recueil en m'envoyant vos fichiers :

[Arnaud.Bodin@agat.univ-lille1.fr](mailto:Arnaud.Bodin@agat.univ-lille1.fr)

Donc n'hésitez pas à taper vos feuilles et corrections, ce sera fait une fois pour toutes et pour tous !

Arnaud Bodin





# Sommaire

<b>I</b>	<b>ALGÈBRE 1</b>	<b>1</b>
1	Nombres complexes	1
2	Logique, ensembles, raisonnements	13
3	Injection, surjection, bijection	22
4	Relation d'équivalence, relation d'ordre	25
5	Dénombrement	26
6	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	30
7	Polynômes	42
8	Fractions rationnelles	50
<b>II</b>	<b>ANALYSE 1</b>	<b>52</b>
9	Propriétés de $\mathbb{R}$	52
10	Suites	58
11	Limites de fonctions	70
12	Continuité et étude de fonctions	76
13	Dérivabilité	82
14	Fonctions circulaires et hyperboliques inverses	87
15	Calculs d'intégrales	90
16	Équations différentielles	102
<b>III</b>	<b>ALGÈBRE 2</b>	<b>107</b>
17	Espaces vectoriels	107
18	Applications linéaires	112
19	Espaces vectoriels de dimension finie	120
20	Matrices	127
21	Déterminants, systèmes linéaires	137
<b>IV</b>	<b>ANALYSE 2</b>	<b>153</b>
22	Suites : compléments	153
23	Continuité et comparaison de fonctions	155
24	Dérivabilité : compléments	157
25	Développements limités	159

26	Intégrales (compléments), intégrales impropres	165
<b>V</b>	<b>ALGÈBRE 3</b>	<b>170</b>
27	Groupes : généralités	170
28	Anneaux et corps	176
29	Groupes finis	180
30	Groupes quotients	187
31	Espaces euclidiens	190
32	Endomorphismes particuliers	199
33	Polynômes d'endomorphismes	210
34	Réduction d'endomorphismes : diagonalisation	212
35	Réduction d'endomorphismes : autres réductions	227
<b>VI</b>	<b>ANALYSE 3</b>	<b>238</b>
36	Fonctions convexes	238
37	Notions de topologie	239
38	Fonctions de deux variables	245
39	Espaces métriques et espaces vectoriels normés	257
40	Suites dans $\mathbb{R}^n$	265
41	Intégrales multiples	266
42	Séries numériques, séries de Fourier	268
<b>VII</b>	<b>GÉOMÉTRIE</b>	<b>274</b>
43	Géométrie affine	274
44	Isométries vectorielles	277
45	Géométrie affine euclidienne	278
46	Courbes paramétrées	289
47	Propriétés métriques des courbes planes	290
48	Coniques	291
49	Analyse vectorielle	291
<b>VIII</b>	<b>QCM et FORMULAIRES</b>	<b>293</b>



## Première partie

## ALGÈBRE 1

## 1 Nombres complexes

## 1.1 Forme cartésienne, forme polaire

**Exercice 1** Mettre sous la forme  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 2** Écrire les nombres complexes suivants sous la forme  $a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) :

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

**Exercice 3** Écrire sous la forme  $a + ib$  les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument  $\pi/3$ .
2. Nombre de module 3 et d'argument  $-\pi/8$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 4** Placer dans le plan cartésien, les points d'affixes suivantes :  $z_1 = i$ ,  $z_2 = 1 + i$ ,  $z_3 = -2 + i$ .

**Exercice 5** Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme  $a + ib$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, \frac{1}{(1+2i)(3-i)}, \frac{1+2i}{1-2i}, \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

**Exercice 6** 1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :  $z_1 = 3 + 3i$ ,  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ ,  $z_3 = -\frac{4}{3}i$ ,  $z_4 = -2$ ,  $z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ .

2. Calculer  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$ .

**Exercice 7** Effectuer les calculs suivants :

1.  $(3+2i)(1-3i)$ .
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument  $\pi/3$  par le nombre complexe de module 3 et d'argument  $-5\pi/6$ .
3.  $\frac{3+2i}{1-3i}$ .
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument  $\pi/3$  par le nombre complexe de module 3 et d'argument  $-5\pi/6$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 8** Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1.  $1 + i(1 + \sqrt{2})$ .
2.  $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$ .

3.  $\frac{\tan \varphi - i}{\tan \varphi + i}$  où  $\varphi$  est un angle donné.

[Exercice corrigé]

**Exercice 9** Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1 + i \quad ; \quad 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3} + i \quad ; \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}.$$

**Exercice 10** Établir les égalités suivantes :

1.  $(\cos(\pi/7) + i \sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i \sin(5\pi/84))$ ,
2.  $(1-i)(\cos(\pi/5) + i \sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i \sin(13\pi/60))$ ,
3.  $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12))}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 11** Calculer le module et l'argument de  $u = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$  et  $v = 1 - i$ . En déduire le module et l'argument de  $w = \frac{u}{v}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 12** Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left( \frac{1 + i - \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i} \right)^2.$$

**Exercice 13** Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 14** Déterminer le module et l'argument de  $\frac{1+i}{1-i}$ . Calculer  $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 15** Calculer  $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2000}$ .

**Exercice 16** Calculer  $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$  et  $(1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$ .

**Exercice 17** Calculer le module et l'argument de  $z = \frac{1}{1+i \tan \alpha}$ .

**Exercice 18** Calculer les puissances  $n$ -ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \quad ; \quad z_2 = 1 + j \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}.$$

**Exercice 19** Comment choisir l'entier naturel  $n$  pour que  $(\sqrt{3}+i)^n$  soit un réel ? un imaginaire ?

**Exercice 20** Soit  $z$  un nombre complexe de module  $\rho$ , d'argument  $\theta$ , et soit  $\bar{z}$  son conjugué. Calculer  $(z + \bar{z})(z^2 + \bar{z}^2) \dots (z^n + \bar{z}^n)$  en fonction de  $\rho$  et  $\theta$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 21 (partiel novembre 88)** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. Mettre le nombre complexe  $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$  sous forme trigonométrique  $z = \rho e^{i\gamma}$  (indication : poser  $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ,  $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$ ).

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^n C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 22** Écrire l'expression  $(1 + \cos \phi + i \sin \phi)$  sous forme trigonométrique. En déduire l'expression de  $(1 + \cos \phi + i \sin \phi)^n$ .

**Exercice 23** Mettre sous forme trigonométrique  $1 + e^{i\theta}$  où  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ . Donner une interprétation géométrique.

[Exercice corrigé]

**Exercice 24** Montrer que si  $|z| \leq k < 1$  alors  $1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$ . Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

**Exercice 25** Montrer algébriquement et géométriquement que si  $|z| = 1$  alors  $|1 + z| \geq 1$  ou  $|1 + z^2| \geq 1$ .

**Exercice 26** Résoudre l'équation  $\exp(z) = \sqrt{3} + 3i$ .

## 1.2 Racines carrées, équation du second degré

**Exercice 27** Calculer les racines carrées de  $1$ ,  $i$ ,  $3 + 4i$ ,  $8 - 6i$ , et  $7 + 24i$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 28** Trouver les racines carrées de  $3 - 4i$  et de  $24 - 10i$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 29** 1. Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/8)$  et  $\sin(\pi/8)$ .

2. Calculer les valeurs de  $\cos(\pi/12)$  et  $\sin(\pi/12)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 30** Montrer que les solutions de  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $a, b, c$  réels, sont réelles ou conjuguées.

[Exercice corrigé]

**Exercice 31** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 = 0 & \quad ; \quad z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 & \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 & \quad ; \\ z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0 & \quad ; \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 & \quad ; \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0 & \quad ; \\ z^4 + 10z^2 + 169 = 0 & \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 32** Trouver les racines complexes de l'équation suivante :

$$x^4 - 30x^2 + 289 = 0.$$

**Exercice 33** Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ , on pose

$$f(z) = \frac{2z - i}{z - 2i}.$$

1. Résoudre l'équation  $z^2 = i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

2. Résoudre l'équation  $f(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ .

**Exercice 34** On note  $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$ .

1. Mettre  $j$  et  $j^2$  sous forme algébrique.

2. Vérifier que  $1 + j + j^2 = 0$ .

3. Factoriser le polynôme  $z^3 - 8i$ .

**Exercice 35** 1. Calculer les racines carrées de  $1 + i$ ,  $7 + 24i$ ,  $i$ ,  $5 + 12i$ ,  $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3+i}}$ .

2. Résoudre les équations suivantes :

(a)  $z^2 + z + 1 = 0$

(b)  $z^2 + z - 2 = 0$

(c)  $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$

(d)  $z^2 + 4z + 5 = 0$

(e)  $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

(f)  $z^4 - (1 - i)z^2 - i = 0$

(g)  $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$

**Exercice 36** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$ .

2.  $z^3 + 3z - 2i = 0$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 37** On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$  suivante :

$$z^2 - (1 + a)(1 + i)z + (1 + a^2)i = 0,$$

où  $a$  est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de  $a \in \mathbb{R}$  les solutions  $z_1$  et  $z_2$  de  $(E)$  (indication : on pourra déterminer les racines carées complexes de  $-2i(1 - a)^2$ ).

2. On désigne par  $Z_1$  (resp.  $Z_2$ ) les points du plan complexe d'affixe  $z_1$  (resp.  $z_2$ ) et par  $M$  le milieu de  $[Z_1, Z_2]$ . Tracer la courbe du plan complexe décrite par  $M$  lorsque  $a$  varie dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 38** 1. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$ . En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0, \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

(a) Justifier la factorisation suivante de  $P_\alpha$  :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + 1\right) \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1\right) \dots \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right)$$

(b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Calculer  $P_\alpha(1)$ . En déduire

$$\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2n} \right) \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n} \right) \dots \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \frac{\sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{4^{n-1}}.$$

2. Pour tout  $\alpha$  appartenant à  $]0, \pi[$ , et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

(a) Montrer que, pour tout  $\alpha$  non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

(b) Quelle est la limite de  $H_n(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0 ?

(c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

### 1.3 Racine $n$ -ième

**Exercice 39** 1. Pour quelles valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  a-t-on  $|1 + iz| = |1 - iz|$ .

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ , où  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.

Calculer les racines cubiques de  $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ .

**Exercice 40** Pour tout nombre complexe  $Z$ , on pose  $P(Z) = Z^4 - 1$ .

1. Factoriser  $P(Z)$  et en déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(Z) = 0$ .

2. Déduire de 1. les solutions de l'équation d'inconnue  $z$  :

$$((2z + 1)/(z - 1))^4 = 1$$

**Exercice 41** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^4 = (1 - i) / (1 + i\sqrt{3})$ .

**Exercice 42** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$  et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

[Exercice corrigé]

**Exercice 43** Trouver les racines cubiques de  $2 - 2i$  et de  $11 + 2i$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 44** Calculer  $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}$  algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,

$\sin \frac{\pi}{12}$ ,  $\tan \frac{\pi}{12}$ ,  $\tan \frac{5\pi}{12}$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^{24} = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 45** Trouver les racines quatrièmes de 81 et de  $-81$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 46** 1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout nombre  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$(z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = z^n - 1,$$

et en déduire que, si  $z \neq 1$ , on a :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

2. Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp(ix) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer pour tout  $x \in \mathbb{R}$  la somme :

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + \dots + \exp((n-1)ix),$$

et en déduire les valeurs de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos((n-1)x)$$

$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin((n-1)x).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 47** Calculer la somme  $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 48** 1. Résoudre  $z^3 = 1$  et montrer que les racines s'écrivent  $1, j, j^2$ . Calculer  $1 + j + j^2$  et en déduire les racines de  $1 + z + z^2 = 0$ .

2. Résoudre  $z^n = 1$  et montrer que les racines s'écrivent  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ . En déduire les racines de  $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$ . Calculer, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \dots + \varepsilon^{(n-1)p}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 49** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

1.  $z^5 = 1$ .
2.  $z^5 = 1 - i$ .
3.  $z^3 = -2 + 2i$ .
4.  $z^5 = \bar{z}$ .

**Exercice 50** 1. Calculer les racines  $n$ -ièmes de  $-i$  et de  $1 + i$ .

2. Résoudre  $z^2 - z + 1 - i = 0$ .
3. En déduire les racines de  $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ .

**Exercice 51** Soit  $\varepsilon$  une racine  $n$ -ième de l'unité ; calculer

$$S = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}.$$

**Exercice 52** Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ .

**Exercice 53** Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^n = \bar{z}$  où  $n \geq 1$ .

**Exercice 54** Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}.$$

**Exercice 55** Résoudre  $z^6 + 27 = 0$ . ( $z \in \mathbb{C}$ )

**Exercice 56 (partiel novembre 91)** 1. Soient  $z_1, z_2, z_3$  trois nombres complexes distincts ayant le même cube.

Exprimer  $z_2$  et  $z_3$  en fonction de  $z_1$ .

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser  $Z = z^3$  ; calculer  $(9 + i)^2$ )

[Exercice corrigé]

**Exercice 57** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ .

**Exercice 58** Déterminer les racines quatrièmes de  $-7 - 24i$ .

**Exercice 59** Soit  $\beta \in \mathbb{C}$  tel que  $\beta^7 = 1$  et  $\beta \neq 1$ . Montrer

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

## 1.4 Géométrie

**Exercice 60** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que :

1.  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$ ,
2.  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 61** 1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (1)  $(z-2)/(z-1) = i$ . On donnera la solution sous forme algébrique.

2. Soit  $M, A$ , et  $B$  les points d'affixes respectives  $z, 1, 2$ . On suppose que  $M \neq A$  et que  $M \neq B$ . Interpréter géométriquement le module et un argument de  $(z-2)/(z-1)$  et retrouver la solution de l'équation (1).

**Exercice 62** Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où  $z$  est appelé l'affixe de  $M$ . Soit  $f : P \text{ rg } P$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z-i}{z+i}$ .

1. Sur quel sous ensemble de  $P$ ,  $f$  est-elle définie ?
2. Calculer  $|z'|$  pour  $z$  affixe d'un point  $M$  situé dans le demi plan ouvert

$$H := \{M(x, y) \in P \mid y > 0\}?$$

3. En déduire l'image par  $f$  de  $H$ .

**Exercice 63** Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormé et on identifie  $P$  à l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où  $z$  est appelé l'affixe de  $M$ . Soit  $g : P \text{ rg } P$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z \neq -1$  associe  $g(M)$  d'affixe  $z' = \frac{1-z}{1+z}$ .

1. Calculer  $z' + \bar{z}'$  pour  $|z| = 1$ .
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées  $(-1, 0)$  par l'application  $g$ .

**Exercice 64** Soit  $C$  la courbe d'équation  $x^2 - xy + y^2 = 0$  dans le plan  $P$  rapporté à un repère orthonormé.

1. La courbe  $C$  a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert  $R$  dont les sommets sont :

$$\begin{aligned} A &= (-3, 2) \\ B &= (4, 2) \\ C &= (4, -1) \\ D &= (-3, -1). \end{aligned}$$

2. Même question pour le rectangle fermé  $R'$  de sommets :

$$\begin{aligned} A' &= (-1, 4) \\ B' &= (2, 4) \\ C' &= (2, 1) \\ D' &= (-1, 1). \end{aligned}$$

**Exercice 65** Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes  $z$  tels que  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$ . Généraliser pour  $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 66** Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes  $z$  tels que  $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = k$  ( $k > 0$ ,  $k \neq 1$ ). Généraliser pour  $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 67** 1. Soit  $A, B, C$  trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement  $a, b, c$ . On suppose que  $a + jb + j^2c = 0$ ; montrer que  $ABC$  est un triangle équilatéral ( $j$  et  $j^2$  sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ). Réciproque ?

2.  $ABC$  étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs  $BOD$  et  $OCE$ , ce qui détermine les points  $D$  et  $E$  ( $O$  est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère  $ADOE$ ? Comparer les triangles  $OBC$ ,  $DBA$  et  $EAC$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 68** Soit  $H$  une hyperbole équilatère de centre  $O$ , et  $M$  un point de  $H$ . Montrer que le cercle de centre  $M$  qui passe par le symétrique de  $M$  par rapport à  $O$  recoupe  $H$  en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

*Indications* : en choisissant un repère adéquat,  $H$  a une équation du type  $xy = 1$ , autrement dit en identifiant le plan de  $H$  au plan complexe,  $z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ . En notant  $a$  l'affixe de  $M$ , le cercle a pour équation  $|z - a|^2 = 4a\bar{a}$ . On pose  $Z = z - a$  et on élimine  $\bar{Z}$  entre les équations du cercle et de l'hyperbole. En divisant par  $Z + 2a$  pour éliminer la solution déjà connue du symétrique de  $M$ , on obtient une équation du type  $Z^3 - A = 0$ .

**Exercice 69** Montrer que pour  $u, v \in \mathbb{C}$ , on a  $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 70** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  tels que  $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') = \frac{\pi}{2}$ .

1. Montrer que  $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 0$ .
2. Montrer que  $|z + z'|^2 = |z - z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2$ .



**Exercice 71** 1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan complexe, d'affixe  $z$  tels que :  
 $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$ .

2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan complexe, d'affixe  $z$  tels que les images de  $1, z, 1+z^2$  soient alignées.

**Exercice 72** Soit  $s = (1-z)(1-iz)$ .

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes  $z$  tel que  $s$  soit réel.

2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes  $z$  tel que  $s$  soit imaginaire pur.

**Exercice 73** 1. Soit  $A$  un point du plan d'affixe  $\alpha = a + ib$ . Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie  $|z|^2 = \alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z$ .

2. Quelles conditions doivent vérifier les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  pour que  $\frac{z_1}{z_2}$  soit réel ?

3. Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que les points du plan complexe d'affixes  $z, iz, i$  forment un triangle équilatéral.

4. Soit  $z = a + ib$ , mettre l'expression  $\frac{z-1}{z+1}$  sous forme  $A + iB$ , . Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe  $z$  telle que l'argument de  $\frac{z-1}{z+1}$  soit  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 74** Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes  $z, z^2, z^3$  soit rectangle au point d'affixe  $z$ .

**Exercice 75** Déterminer les nombres complexes  $z \in \mathbb{C}^*$  tels que les points d'affixes  $z, \frac{1}{z}$  et  $(1-z)$  soient sur un même cercle de centre  $O$ .

**Exercice 76** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système :

$$|z-1| \leq 1, |z+1| \leq 1.$$

**Exercice 77 (Comment construire un pentagone régulier ?)** Soit  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  un pentagone régulier. On note  $O$  son centre et on choisit un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  avec  $\vec{u} = \vec{OA}_0$ , qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

1. Donner les affixes  $\omega_0, \dots, \omega_4$  des points  $A_0, \dots, A_4$ . Montrer que  $\omega_k = \omega_1^k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Montrer que  $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$ .

2. En déduire que  $\cos(\frac{2\pi}{5})$  est l'une des solutions de l'équation  $4z^2 + 2z - 1 = 0$ . En déduire la valeur de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ .

3. On considère le point  $B$  d'affixe  $-1$ . Calculer la longueur  $BA_2$  en fonction de  $\sin \frac{\pi}{10}$  puis de  $\sqrt{5}$  (on remarquera que  $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$ ).

4. On considère le point  $I$  d'affixe  $\frac{i}{2}$ , le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I$  de rayon  $\frac{1}{2}$  et enfin le point  $J$  d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec la demi-droite  $[BI)$ . Calculer la longueur  $BI$  puis la longueur  $BJ$ .

5. **Application** : Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

[Exercice corrigé]

## 1.5 Trigonométrie

**Exercice 78** On rappelle la formule ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

1. Etablir les formules d'Euler ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer de produit en somme) ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) :

$$2 \cos a \cos b \quad ; \quad 2 \sin a \sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$

3. A l'aide de la formule :  $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), retrouver celles pour  $\sin(x+y)$ ,  $\cos(x+y)$  et  $\tan(x+y)$  en fonction de sinus, cosinus et tangente de  $x$  ou de  $y$ ; en déduire les formules de calcul pour  $\sin(2x)$ ,  $\cos(2x)$  et  $\tan(2x)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

4. Calculer  $\cos x$  et  $\sin x$  en fonction de  $\tan \frac{x}{2}$  ( $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ).

5. Etablir la formule de Moivre ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

6. En utilisant la formule de Moivre, calculer  $\cos(3x)$  et  $\sin(3x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

**Exercice 79** 1. Calculer  $\cos 5\theta$ ,  $\cos 8\theta$ ,  $\sin 6\theta$ ,  $\sin 9\theta$ , en fonction des lignes trigonométriques de l'angle  $\theta$ .

2. Calculer  $\sin^3 \theta$ ,  $\sin^4 \theta$ ,  $\cos^5 \theta$ ,  $\cos^6 \theta$ , à l'aide des lignes trigonométriques des multiples entiers de  $\theta$ .

**Exercice 80** En utilisant les nombres complexes, calculer  $\cos 5\theta$  et  $\sin 5\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 81** 1. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de  $\cos \theta$  et de  $\sin \theta$  :

(a)  $\cos(2\theta)$  et  $\sin(2\theta)$ .

(b)  $\cos(3\theta)$  et  $\sin(3\theta)$ . En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution  $\cos(\frac{\pi}{3})$  et la résoudre.

2. Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :  $1 + \cos^2 x$ ,  $\cos^3 x + 2 \sin^2 x$ .

**Exercice 82** Exprimer  $(\cos 5x)(\sin 3x)$  en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$ .

**Exercice 83** Soit  $x$  un nombre réel. On note  $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \sum_{k=0}^n \cos kx$ , et  $S = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sum_{k=0}^n \sin kx$ . Calculer  $C$  et  $S$ .

**Exercice 84** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \tan x = -1,$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions; résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right).$$

**Exercice 85** Calculer  $\sin(25\pi/3)$ ,  $\cos(19\pi/4)$ ,  $\tan(37\pi/6)$ .

**Exercice 86** Résoudre l'équation :  $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ , puis l'inéquation :  $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$ .

**Exercice 87** Etudier le signe de la fonction donnée par  $f(x) = \cos 3x + \cos 5x$ .

**Exercice 88** Simplifier, suivant la valeur de  $x \in [-\pi, \pi]$ , l'expression  $\sqrt{1 + \cos x} + |\sin x/2|$ .

**Exercice 89** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes : (donner les valeurs des solutions appartenant à  $] -\pi, \pi]$  et les placer sur le cercle trigonométrique).

1.  $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$ ,
2.  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ,
3.  $\cos(3x) = \sin(x)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 90** A quelle condition sur le réel  $m$  l'équation  $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = m$  a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour  $m = \sqrt{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 91** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(5x) + \cos(3x) &\leq \cos(x) \\ 2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 &> 0. \end{aligned}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 92** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$ .
2.  $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$ .

[Exercice corrigé]

## 1.6 Divers

**Exercice 93** Montrer que tout nombre complexe  $z$  non réel de module 1 peut se mettre sous la forme  $\frac{1+ir}{1-ir}$ , où  $r \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 94** Soit  $u, v$  des nombres complexes non réels tels que  $|u| = |v| = 1$  et  $uv \neq -1$ . Montrer que  $\frac{u+v}{1+uv}$  est réel.

**Exercice 95** Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad ; \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx).$$

**Exercice 96 (Entiers de Gauss)** Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $\mathbb{Z}[i]$  alors  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  le sont aussi.
2. Trouver les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ , c'est-à-dire les éléments  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  tels qu'il existe  $\beta \in \mathbb{Z}[i]$  avec  $\alpha\beta = 1$ .
3. Vérifier que quel que soit  $\omega \in \mathbb{C}$  il existe  $z \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|\omega - z| < 1$ .

4. Montrer qu'il existe sur  $\mathbb{Z}[i]$  une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  il existe  $q$  et  $r$  dans  $\mathbb{Z}[i]$  vérifiant :

$$\alpha = \beta q + r \quad \text{avec} \quad |r| < |\beta|.$$

(Indication : on pourra considérer le complexe  $\frac{\alpha}{\beta}$ )

[Exercice corrigé]

**Exercice 97** Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$ . Étudier les cas d'égalité.

**Exercice 98** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $ad - bc = 1$  et  $c \neq 0$ . Montrer que si  $z \neq -\frac{d}{c}$  alors  $\Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$ .

**Exercice 99** Que dire de trois complexes  $a, b, c$  non nuls tels que  $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$ .

**Exercice 100** 1. Étudier la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $z_0 = 4$ ,  $z_{n+1} = f(z_n)$  où  $f$  est l'application de  $\mathbb{C}$  sur lui-même définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = i + \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})z.$$

*Indication* : on commencera par rechercher les coordonnées cartésiennes de l'unique point  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ , puis on s'intéressera à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = z_n - \alpha.$$

2. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = |z_{n+1} - z_n|$ . Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n l_k$$

et interpréter géométriquement.

**Exercice 101 (Examen octobre 1999)** On définit une fonction  $f$  de  $\mathbb{C} - \{i\}$  dans  $\mathbb{C} - \{1\}$  en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose  $z$  réel. Quel est le module de  $f(z)$  ?
2. Trouver les nombres complexes  $z$  tels que  $f(z) = z$ .

**Exercice 102 (Examen novembre 2001)** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .

1. Calculer les points fixes de la fonction  $f$ , c'est à dire les nombres complexes  $z$  tels que  $f(z) = z$ .
2. Déterminer les nombres complexes  $z$  pour lesquels  $f(z)$  est réel.

**Exercice 103** 1. Montrer que si  $x + y + z = a$ ,  $yz + zx + xy = b$ ,  $xyz = c$ , alors  $x, y$  et  $z$  sont solutions de l'équation  $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$ . Trouver  $x, y$  et  $z$  si on suppose  $a = b = 0$  et  $c = -8$ .

2. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

## 2 Logique, ensembles, raisonnements

### 2.1 Logique

**Exercice 104** Soient  $R$  et  $S$  des relations. Donner la négation de  $R \Rightarrow S$ .

**Exercice 105** Démontrer que  $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 106** Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ;$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions  $a, b, c, d$  sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

[Exercice corrigé]

**Exercice 107** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) \leq 1$ .
2. L'application  $f$  est croissante.
3. L'application  $f$  est croissante et positive.
4. Il existe  $x \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f(x) \leq 0$ .

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

[Exercice corrigé]

**Exercice 108** Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose :  $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$ .

1.  $x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4 \dots\dots x = 2$  ;
2.  $z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$  ;
3.  $x \in \mathbb{R} \quad x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 109** Dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit les ensembles  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0\}$  et  $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x \geq 0\}$ . Évaluer les propositions suivantes :

1.  $\forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad \exists M_1 \in F_1 \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| < \varepsilon$
2.  $\exists M_1 \in F_1 \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| < \varepsilon$
3.  $\exists \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad / \quad \forall M_1 \in F_1 \forall M_2 \in F_2 \quad \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| < \varepsilon$
4.  $\forall M_1 \in F_1 \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in ]0, +\infty[ \quad / \quad \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

[Exercice corrigé]

**Exercice 110** Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.

[Exercice corrigé]

**Exercice 111** Écrire la négation des assertions suivantes où  $P, Q, R, S$  sont des propositions.

1.  $P \Rightarrow Q$ ,
2.  $P$  et non  $Q$ ,

3.  $P$  et  $(Q$  et  $R)$ ,
4.  $P$  ou  $(Q$  et  $R)$ ,
5.  $(P$  et  $Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 112** Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;
2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier  $x$ , il existe un entier  $y$  tel que, pour tout entier  $z$ , la relation  $z < x$  implique le relation  $z < x + 1$  ;
4.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 113 (Le missionnaire et les cannibales)** Les cannibales d'une tribu se préparent à manger un missionnaire. Désirant lui prouver une dernière fois leur respect de la dignité et de la liberté humaine, les cannibales proposent au missionnaire de décider lui-même de son sort en faisant une courte déclaration : si celle-ci est vraie, le missionnaire sera rôti, et il sera bouilli dans le cas contraire. Que doit dire le missionnaire pour sauver sa vie ? (d'après Cervantès)

**Exercice 114** La proposition  $(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q)$  est-elle vraie ?

**Exercice 115** On suppose que la proposition  $P$  est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1.  $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$ .
2.  $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$ .
3.  $P \Rightarrow R \vee S$ .
4.  $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$ .
5.  $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$ .
6.  $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ .

La proposition  $T$  est-elle vraie ?

**Exercice 116** Ecrire la négation des phrases suivantes :

1.  $(\forall x)(\exists n)/(x \leq n)$ .
2.  $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$ .
3.  $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$ .
4.  $(\forall x)(\exists y)/(xyx^{-1} = x)$ .
5.  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \varepsilon)$ .
6.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ .

**Exercice 117** Comparer les différentes phrases (sont-elles équivalentes, contraires, quelles sont celles qui impliquent les autres...)

1.  $(\forall x)(\exists y)/(x \leq y)$ .
2.  $(\forall x)(\forall y)(x \leq y)$ .
3.  $(\exists x)(\exists y)/(x \leq y)$ .
4.  $(\exists x)/(\forall y)(x \leq y)$ .
5.  $(\exists x)/(\forall y)(y < x)$ .

6.  $(\exists x)(\exists y)/(y < x)$ .

7.  $(\forall x)(\exists y)/(x = y)$ .

**Exercice 118** Si  $P(x)$  est une proposition dépendant de  $x \in X$ , on note  $\overline{P} = \{x \in X/P(x) \text{ est vraie}\}$ . Exprimer en fonction de  $\overline{P}$  et  $\overline{Q}$  les ensembles  $\overline{\neg P}, \overline{P \wedge Q}, \overline{P \vee Q}, \overline{P \Rightarrow Q}, \overline{P \Leftrightarrow Q}$ .

**Exercice 119** Montrer que  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $(n \geq N \Rightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 120** Soit  $f, g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1.  $f$  est majorée ;
2.  $f$  est bornée ;
3.  $f$  est paire ;
4.  $f$  est impaire ;
5.  $f$  ne s'annule jamais ;
6.  $f$  est périodique ;
7.  $f$  est croissante ;
8.  $f$  est strictement décroissante ;
9.  $f$  n'est pas la fonction nulle ;
10.  $f$  n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ;
11.  $f$  atteint toutes les valeurs de  $\mathbb{N}$  ;
12.  $f$  est inférieure à  $g$  ;
13.  $f$  n'est pas inférieure à  $g$ .

[Exercice corrigé]

## 2.2 Ensembles

**Exercice 121** Montrer que  $\emptyset \subset X$ , pour tout ensemble  $X$ .

**Exercice 122** Montrer par contraposition les assertions suivantes,  $E$  étant un ensemble :

1.  $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$ ,
2.  $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 123** Soit  $A, B$  deux ensembles, montrer  $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$  et  $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 124** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$ . Démontrer que :

- $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)),$$
- $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
- $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
- $$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
- $$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 125**  $A$  et  $B$  étant des parties d'un ensemble  $E$ , démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

**Exercice 126** Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Exercice 127** Montrer que si  $F$  et  $G$  sont des sous-ensembles de  $E$  :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$

**Exercice 128** Soit  $E$  et  $F$  des ensembles. Si  $A \subset E$  et  $B \subset F$  montrer que  $A \times B \subset E \times F$ .

**Exercice 129** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  et  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ . Écrire le produit cartésien  $A \times B$ . Quel est le nombre de parties de  $A \times B$  ?

**Exercice 130** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Quel est le nombre d'éléments de  $E^p$  ? Quel est le nombre de parties de  $E^p$  ?

**Exercice 131**  $x, y, z$  étant des nombres réels, résoudre le système :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)z = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

**Exercice 132** Soit  $A$  une partie de  $E$ , on appelle fonction caractéristique de  $A$  l'application  $f$  de  $E$  dans l'ensemble à deux éléments  $\{0, 1\}$ , telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $f$  et  $g$  leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1.  $1 - f$ .
2.  $fg$ .
3.  $f + g - fg$ .

**Exercice 133** Soit un ensemble  $E$  et deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ . On désigne par  $A \triangle B$  l'ensemble  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.

1. Démontrer que  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .
2. Démontrer que pour toutes les parties  $A, B, C$  de  $E$  on a  $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ .
3. Démontrer qu'il existe une unique partie  $X$  de  $E$  telle que pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $A \triangle X = X \triangle A = A$ .
4. Démontrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , il existe une partie  $A'$  de  $E$  et une seule telle que  $A \triangle A' = A' \triangle A = X$ .

**Exercice 134** 1. Écrire l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques suivantes :  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ ,  $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ .

2. Simplifier  $[1, 3] \cap [2, 4]$  et  $[1, 3] \cup [2, 4]$ .



3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $n\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs multiples de  $n$  :  $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$ . Simplifier  $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ .

**Exercice 135** On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| < 1\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\} \\ A_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > -1\} \\ A_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < 1\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$$

**Exercice 136** Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[ 3, 3 + \frac{1}{n^2} \right[ \text{ et } I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] -2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right].$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 137** Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[ \text{ et } I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ 1 + \frac{1}{n}, n \right].$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 138** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  trois parties de  $E$  telles que  $A \cup B = A \cup C$  et  $A \cap B = A \cap C$ . Montrer que  $B = C$ .

**Exercice 139** Soient  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  trois parties de  $E$ . Montrer que  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .

**Exercice 140** Donner les positions relatives de  $A, B, C \subset E$  si  $A \cup B = B \cap C$ .

**Exercice 141** Est-il vrai que  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ? Et  $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ?

**Exercice 142** Montrer que  $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$ .

**Exercice 143** Donner la liste des éléments de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$ .

**Exercice 144** Soient  $A, B \subset E$ . Résoudre les équations à l'inconnue  $X \subset E$

1.  $A \cup X = B$ .
2.  $A \cap X = B$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 145** Soient  $E, F, G$  trois ensembles. Montrer que  $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$ .

**Exercice 146** Soient  $E, F, G, H$  quatre ensembles. Comparer les ensembles  $(E \times F) \cap (G \times H)$  et  $(E \cap G) \times (F \cap H)$ .

**Exercice 147** Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\{1, 2, 3\}$ . Pour  $i = 1, 2, 3$  on pose  $A_i = \{f \in E \mid f(0) = i\}$ . Montrer que les  $A_i$  forment une partition de  $E$ .

## 2.3 Absurde et contraposée

**Exercice 148** Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 149** Soit  $X$  un ensemble et  $f$  une application de  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$ . On note  $A$  l'ensemble des  $x \in X$  vérifiant  $x \notin f(x)$ . Démontrer qu'il n'existe aucun  $x \in X$  tel que  $A = f(x)$ .

**Exercice 150** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de l'ensemble  $\mathbb{N}$  dans lui-même. On définit une application  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  en posant  $f(n) = f_n(n) + 1$ . Démontrer qu'il n'existe aucun  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f = f_p$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 151** 1. Soit  $p_1, p_2, \dots, p_r$   $r$  nombres premiers. Montrer que l'entier  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  n'est divisible par aucun des entiers  $p_i$ .

2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

[Exercice corrigé]

## 2.4 Récurrence

**Exercice 152** Démontrer, en raisonnant par récurrence, que  $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$  est divisible par 111 quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . (Indication :  $1000 = 9 \times 111 + 1$ ).

**Exercice 153** Montrer :

$$1. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 154** En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit  $\mathcal{P}(n)$  :  $n$  crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathcal{P}(1)$  est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons  $\mathcal{P}(n)$ . Soit  $n+1$  crayons. On en retire 1. Les  $n$  crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les  $n$  nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les  $n$  autres.

La proposition est donc vraie au rang  $n+1$ .

- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

**Exercice 155** Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 4$  et  $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$ .

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ .
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ .
4. La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 156**

1. Dans le plan, on considère trois droites  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n’y en a pas deux parallèles. Donner le nombre  $R_3$  de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites  $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ , telles qu’il n’en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre  $R_4$  de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère  $n$  droites  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , telles qu’il n’en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit  $R_n$  le nombre de régions délimitées par  $\Delta_1 \dots \Delta_n$ , et  $R_{n-1}$  le nombre de régions délimitées par  $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$ . Montrer que  $R_n = R_{n-1} + n$ .
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par  $n$  droites en position générale, c’est-à-dire telles qu’il n’en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

[Exercice corrigé]

**Exercice 157** Soit  $X$  un ensemble. Pour  $f \in \mathcal{F}(X, X)$ , on définit  $f^0 = id$  et par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$   $f^{n+1} = f^n \circ f$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} f^{n+1} = f \circ f^n$ .
2. Montrer que si  $f$  est bijective alors  $\forall n \in \mathbb{N} (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 158** Montrer que

$$\forall n \geq 2, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

**Exercice 159** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l’on a

$$S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

**Exercice 160** Pour  $n \in \mathbb{N}$  on considère la propriété suivante :

$$P_n : 2^n > n^2$$

1. Pour quelles valeurs de  $n$  l’implication  $P_n \implies P_{n+1}$  est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de  $n$  la propriété  $P_n$  est-elle vraie ?

**Exercice 161** Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

1. Pour tout  $n \geq 2$ , on considère la propriété :

$$P(n) : n \text{ points distincts du plan sont toujours alignés}$$

2. Initialisation :  $P(2)$  est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.
3. Hérédité : On suppose que  $P(n)$  est vraie et on va démontrer  $P(n+1)$ .

Soit donc  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$  des points distincts. D’après l’hypothèse de récurrence,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont alignés sur une droite  $d$ , et  $A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$  sont alignés sur une droite  $d'$ . Les deux droites  $d$  et  $d'$  ayant  $n-1$  points communs  $A_2, \dots, A_n$  sont confondues. Donc  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$  sont alignés, ce qui montre l’hérédité de la propriété.

4. Conclusion : la propriété  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

**Exercice 162** 1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , 9 divise  $10^n - 1$ .

2. Soit  $k$  un entier strictement positif. Étudier la propriété suivante : pour tout entier naturel  $n$ ,  $k$  divise  $(k+1)^n + 2$ .

**Exercice 163** Démontrer que pour  $n \geq 1$ , le produit de  $n$  entiers impairs est un entier impair.

**Exercice 164** On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ .

**Exercice 165** Soit  $b \geq 2$  un entier fixé. Démontrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et des entiers  $a_0, a_1, \dots, a_n$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, b-1\}$  tels que :

$$N = a_0 + a_1 b + \dots + a_n b^n \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$

Démontrer que pour chaque  $N$ , le système  $(n, a_0, a_1, \dots, a_n)$  est déterminé par la propriété ci-dessus.

On dit que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont les chiffres de l'écriture du nombre  $N$  suivant la base  $b$ .

**Exercice 166** Démontrer par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k!$  divise le produit de  $k$  entiers consécutifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, k! \mid n(n+1) \cdots (n-k+1)$$

**Exercice 167** Les propriétés

$$P_n : 3 \mid 4^n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et

$$Q_n : 3 \mid 4^n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sont-elles vraies ou fausses ?

**Exercice 168** 1. Calculer les restes de la division euclidienne de  $1, 4, 4^2, 4^3$  par 3.

2. Formuler, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une hypothèse  $\mathcal{P}(n)$  concernant le reste de la division euclidienne de  $4^n$  par 3. Démontrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre  $16^n + 4^n + 3$  est-il divisible par 3.

**Exercice 169** Démontrer, en raisonnant par récurrence, que  $3^{2n+2} - 2^{n+1}$  est divisible par 7 quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 170** 1. Démontrer par récurrence :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Calculer de deux manières différentes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^n (k+1)^3.$$

3. En déduire :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + 3n).$$

**Exercice 171** Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 172** Démontrer, en le déterminant qu'il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, 2^n \geq (n+2)^2.$$

**Exercice 173** Démontrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 2$  l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

est vraie.

**Exercice 174** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  on a

$$n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k.$$

2. Soit  $b$  un réel positif ou nul. Montrer par récurrence, que pour tout  $n \geq 1$  on a

$$(1+b)^n \leq 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{(nb)^2}{2!} + \dots + \frac{(nb)^n}{n!}.$$

**Exercice 175** Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k},$$

pour tout réel  $a$  et  $b$ .

**Exercice 176** On définit une suite  $(F_n)$  de la façon suivante :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

1. Calculer  $F_n$  pour  $1 < n < 10$ .
2. Montrer que l'équation  $x^2 = x+1$  admet une unique solution positive  $a$  que l'on calculera.
3. Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$a^{n-2} < F_n < a^{n-1}.$$

**Exercice 177** Montrer que :

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}.$$

**Exercice 178** Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , trouver une loi simplifiant le produit :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 179** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soient  $a_0, \dots, a_n$  des nombres réels de même signe tel que  $a_i > -1$ , montrer que :

$$(1+a_0) \dots (1+a_n) > 1+a_0 + \dots + a_n.$$

## 2.5 Divers

**Exercice 180** Quels sont les entiers  $n$  tels que  $4^n \leq n!$  ?

**Exercice 181** Montrer que :

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}.$$

*Indication* : montrer que

$$\forall n \geq 2, \exists (p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n = \frac{2p_n + 1}{2q_n}.$$

**Exercice 182** Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une application vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n+1) > f(f(n)).$$

Montrer que  $f = Id_{\mathbb{N}^*}$ . *Indications* : que dire de  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f(k) = \inf\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$  ? En déduire que  $\forall n > 0, f(n) > f(0)$ . Montrer ensuite que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\forall m > n, f(m) > f(n)$  et  $\forall m \leq n, f(m) \geq m$  (on pourra introduire  $k$  tel que  $f(k)$  soit le plus petit entier de la forme  $f(m)$  avec  $m > n$ ). En déduire que  $f$  est strictement croissante et qu'il n'existe qu'une seule solution au problème. Laquelle ?

**Exercice 183** Pour  $p \in \{1, 2, 3\}$  on note  $S_p = \sum_{k=0}^n k^p$ .

1. A l'aide du changement d'indice  $i = n - k$  dans  $S_1$ , calculer  $S_1$ .
2. Faire de même avec  $S_2$ . Que se passe-t-il ?
3. Faire de même avec  $S_3$  pour l'exprimer en fonction de  $n$  et  $S_2$ .
4. En utilisant l'exercice 153, calculer  $S_3$ .

**Exercice 184** Pour calculer des sommes portant sur deux indices, on a intérêt à représenter la zone du plan couverte par ces indices et à sommer en lignes, colonnes ou diagonales... Calculer :

1.  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ .
2.  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i(j-1)$ .
3.  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-1)j$ .
4.  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (n-i)(n-j)$ .
5.  $\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p+q)^2$  (on posera  $k = p+q$ ).

## 3 Injection, surjection, bijection

### 3.1 Application

**Exercice 185** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) = 3x+1$  et  $g(x) = x^2-1$ . A-t-on  $f \circ g = g \circ f$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 186** Soit l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f : x \mapsto x^2$ .

1. Déterminer les ensembles suivants :  $f([-3, -1])$ ,  $f([-2, 1])$ ,  $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$  et  $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$ . Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles  $f^{-1}(]-\infty, 2])$ ,  $f^{-1}([1, +\infty[)$ ,  $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$  et  $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$ .

### 3.2 Injection, surjection

**Exercice 187** Donner des exemples d'applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (puis de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ) injective et non surjective, puis surjective et non injective.

**Exercice 188** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3 - x$ .  
 $f$  est-elle injective ? surjective ? Déterminer  $f^{-1}([-1, 1])$  et  $f(\mathbb{R}_+)$ .

**Exercice 189** Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n \quad ; \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto -n$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \quad ; \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$$

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

**Exercice 190** Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$$

$$2. g : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$$

$$3. h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$$

$$4. k : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

**Exercice 191** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x/(1 + x^2)$ .

1.  $f$  est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ .
3. Montrer que la restriction  $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$   $g(x) = f(x)$  est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de  $f$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 192** L'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z + 1/z$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Donner l'image par  $f$  du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Donner l'image réciproque par  $f$  de la droite  $i\mathbb{R}$ .

**Exercice 193** On considère quatre ensembles  $A, B, C$  et  $D$  et des applications  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ,  $h : C \rightarrow D$ . Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 194** Soit  $f : X \rightarrow Y$ . Montrer que

1.  $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ .
2.  $f$  est surjective ssi  $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B$ .
3.  $f$  est injective ssi  $\forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$ .
4.  $f$  est bijective ssi  $\forall A \subset X \ f(\mathbb{C}A) = \mathbb{C}f(A)$ .

**Exercice 195** Soit  $f : X \rightarrow Y$ . Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- i.  $f$  est injective.
- ii.  $\forall A, B \subset X \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .
- iii.  $\forall A, B \subset X \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .

**Exercice 196** Soit  $f : X \rightarrow Y$ . On note  $\hat{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{cases}$  et  $\tilde{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases}$ .

Montrer que :

1.  $f$  est injective ssi  $\hat{f}$  est injective.
2.  $f$  est surjective ssi  $\tilde{f}$  est injective.

**Exercice 197 (Exponentielle complexe)** Si  $z = x + iy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $e^z = e^x \times e^{iy}$ .

1. Déterminer le module et l'argument de  $e^z$ .
2. Calculer  $e^{z+z'}$ ,  $e^{\bar{z}}$ ,  $e^{-z}$ ,  $(e^z)^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .
3. L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto e^z$ , est-elle injective ?, surjective ?

[Exercice corrigé]

### 3.3 Bijection

**Exercice 198** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ , et  $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_{a,b}(x) = ax + b$ . Démontrer que  $f_{a,b}$  est une permutation et déterminer sa réciproque.

[Exercice corrigé]

**Exercice 199** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que  $f \circ f = id$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 200** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \ t \mapsto e^{it}$ . Montrer que  $f$  est une bijection sur un ensemble à préciser.

[Exercice corrigé]

**Exercice 201** On appelle *demi-plan de Poincaré* l'ensemble  $\mathcal{P}$  des nombres complexes  $z$  tels que  $\text{Im } z > 0$ , et *disque unité* l'ensemble  $\mathcal{D}$  des nombres complexes  $z$  tels que  $|z| < 1$ . Démontrer que  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  est une bijection de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 202** Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $f(x) = x^2 - 1$ .  $f$  est-elle bijective ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 203** Soient  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ . Montrer que si  $g \circ f$  et  $h \circ g$  sont bijectives alors  $f, g$  et  $h$  le sont également.



**Exercice 204** Soient  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A$ . Montrer que si  $h \circ g \circ f$  et  $g \circ f \circ h$  sont injectives et  $f \circ h \circ g$  surjective alors  $f, g$  et  $h$  sont bijectives.

**Exercice 205** Soit  $X$  un ensemble. Si  $A \subset X$  on note  $\chi_A$  la fonction caractéristique associée. Montrer que  $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X, \{0, 1\}) \\ A \mapsto \chi_A \end{cases}$  est bijective.

**Exercice 206** Soit  $E$  un ensemble non vide. On se donne deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  et on définit l'application  $f : \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ ,  $X \mapsto (A \cap X) \cup (B \cap X^c)$ . Discuter et résoudre l'équation  $f(X) = \emptyset$ . En déduire une condition nécessaire pour que  $f$  soit bijective.

On suppose maintenant  $B = A^c$ . Exprimer  $f$  à l'aide de la différence symétrique  $\Delta$ . Montrer que  $f$  est bijective, préciser  $f^{-1}$ .  $f$  est-elle involutive (i.e.  $f^2 = id$ ) ? Quelle propriété en déduit-on ?

## 4 Relation d'équivalence, relation d'ordre

### 4.1 Relation d'équivalence

**Exercice 207** 1. Soit  $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{R}$  par :  $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$ . Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. Identifier  $E/\mathcal{R}$ .

2. Mêmes questions avec  $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $(p, q)\mathcal{R}(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$ .

**Exercice 208** Dans  $\mathbb{R}^2$  on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 209** Dans  $\mathbb{C}$  on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $z \in \mathbb{C}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 210** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ , symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

“ $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$  car  $\mathcal{R}$  est symétrique,  
or  $(x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$  car  $\mathcal{R}$  est transitive,  
donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.”

[Exercice corrigé]

**Exercice 211** Étudier la relation  $\mathfrak{R}$  définie sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) par :

$$f\mathfrak{R}g \iff \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Rightarrow f(x) = g(x).$$

**Exercice 212** Montrer que la relation  $\mathfrak{R}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$x\mathfrak{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour  $x$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , le nombre d'éléments de la classe de  $x$  modulo  $\mathfrak{R}$ .

## 4.2 Relation d'ordre

**Exercice 213** La relation “divise” est-elle une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}$ ? sur  $\mathbb{Z}$ ? Si oui, est-ce une relation d'ordre total?

**Exercice 214** Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si l'ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans  $\mathcal{P}(E)$  :  $A\mathcal{R}_1B \Leftrightarrow A \subset B$  ;  $A\mathcal{R}_2B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .
2. Dans  $\mathbb{Z}$  :  $a\mathcal{R}_3b \Leftrightarrow a$  et  $b$  ont la même parité ;  $a\mathcal{R}_4b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ a - b = 3n$  ;  $a\mathcal{R}_5b \Leftrightarrow a - b$  est divisible par 3.

**Exercice 215** Soient  $(X, \leq)$  et  $(Y, \leq)$  deux ensembles ordonnés (on note abusivement les deux ordres de la même façon). On définit sur  $X \times Y$  la relation  $(x, y) \leq (x', y')$  ssi  $(x < x')$  ou  $(x = x'$  et  $y \leq y')$ . Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi  $X$  et  $Y$  sont totalement ordonnés.

**Exercice 216** Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie?

**Exercice 217** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné. On définit sur  $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$  la relation  $\mathcal{R}$  par  $X\mathcal{R}Y$  ssi  $(X = Y$  ou  $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leq y)$ . Vérifier que c'est une relation d'ordre.

**Exercice 218** Montrer que  $a * b = \frac{a + b}{1 + ab}$  est une l.c.i sur  $] -1, 1[$  et déterminer ses propriétés.

## 5 Dénombrement

### 5.1 Binôme de Newton et $C_n^p$

**Exercice 219** Démontrer que si  $p$  est un nombre premier,  $p$  divise  $C_p^k$  pour  $1 \leq k \leq p - 1$ .

**Exercice 220** En utilisant la fonction  $x \mapsto (1 + x)^n$ , calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k ; \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 221** Démontrer que  $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$  (pour  $0 \leq k \leq p \leq n$ ). En déduire que

$$\sum_{k=0}^n C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p.$$

**Exercice 222** En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1.  $2^n + 1$  est divisible par 3 si et seulement si  $n$  est impair ;
2.  $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$  est divisible par 7.

[Exercice corrigé]

**Exercice 223** Démontrer que  $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$  pour  $1 \leq p \leq n - 1$ .

**Exercice 224** Montrer que, pour  $p$  et  $n$  entiers naturels non nuls tels que  $1 \leq p \leq n$ , on a :

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

**Exercice 225** 1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p,$$

où  $p$  et  $n$  sont des entiers naturels avec  $0 \leq p \leq n$ .

2. Avec les mêmes notations, montrer que

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

**Exercice 226** 1. Soient  $n, p$  et  $q$  des entiers naturels tels que  $0 \leq p, q \leq n$ .

2. Montrer que l'on a  $C_n^p = C_n^q$  si et seulement si  $p = q$  ou  $p + q = n$ .

3. Résoudre l'équation

$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{m^2-2n+3}.$$

**Exercice 227** Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ . En utilisant la formule du binôme, démontrer que  $m^{2p+1} + n^{2p+1}$  est divisible par  $m + n$ .

**Exercice 228** En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0 \quad (b) \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 229** Calculer le module et l'argument de  $(1+i)^n$ . En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots \\ S_2 &= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots \end{aligned}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 230** Démontrer les formules suivantes :

1.  $C_n^m = C_m^{n-m}$  (on pourra utiliser le fait que  $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) A \mapsto A^c$  est une bijection.)

2.  $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ ,

3.  $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 231** Soient  $E$  un ensemble non vide et  $X, Y$  une partition de  $E$ .

1. Montrer que l'application suivante est une bijection :

$$\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$$

$$A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$$

2. Montrer que pour  $p, q, r \in \mathbb{N}$  tel que  $r \leq p + q$  on a :

$$\sum_{i+j=r} C_p^i C_q^j = C_{p+q}^r.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

**Exercice 232** Soit  $E$  un ensemble,  $a \in E$  et  $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est une bijection.
2. On suppose désormais que  $E$  est fini et  $\text{Card}(E) = n$ . On pose  $\mathcal{P}_0(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal pair et  $\mathcal{P}_1(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  de cardinal impair. Montrer que  $\text{Card}(\mathcal{P}_0(E)) = \text{Card}(\mathcal{P}_1(E))$ .
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$ .

**Exercice 233** En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ . En déduire la valeur de  $\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k}$ .

**Exercice 234** Soient  $0 \leq p \leq n$ .

1. Montrer par récurrence sur  $n$  que  $\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$ .
2. Écrire ces égalités pour  $p = 2$  et  $p = 3$ .
3. En déduire les sommes

$$\begin{aligned} S'_2 &= 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1).n & S_2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \\ S'_3 &= 1^2.2 + 2^2.3 + \dots + (n-1)^2.n & S_3 &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \end{aligned}$$

## 5.2 Cardinal

**Exercice 235** Montrer que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable en utilisant l'application :

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \begin{cases} n \mapsto 2n - 1 & \text{si } n > 0; \\ n \mapsto -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 236** Pour  $A, B$  deux ensembles de  $E$  on note  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Pour  $E$  un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A \Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 237** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$ ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 238** Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives.

**Exercice 239** On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

**Exercice 240** Soient  $A, A', B, B'$  quatre ensembles tels que :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A') = a \text{ et } \text{Card}(B) = \text{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de  $A \times B$  sur  $A' \times B'$ .
2. Supposons maintenant que  $\{A, B\}, \{A', B'\}$  forment deux partitions de  $E$ , un ensemble. Déterminer le nombre de bijections  $f : E \rightarrow E$  telles que  $f(A) = A'$  et  $f(B) = B'$ .

**Exercice 241** Soient  $A$  et  $B$  deux sous ensembles finis d'un ensemble  $E$ .

1. Montrer que :  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ .
2. Montrer par récurrence que si  $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille de sous-ensembles finis de  $E$  alors :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \text{Card}(F_i)$$

avec égalité si les  $F_i$  sont deux à deux disjoints.

**Exercice 242** Soient  $1 \leq k \leq n$ . Déterminer le nombre de  $k$ -uplets  $(i_1, \dots, i_k)$  tels que  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

### 5.3 Divers

**Exercice 243** 1. (*principe des bergers*) Soient  $E, F$  deux ensembles avec  $F$  ensemble fini, et  $f$  une surjection de  $E$  sur  $F$  vérifiant :

$$\forall y \in F, \text{Card}(f^{-1}(y)) = p$$

Montrer que  $E$  est alors un ensemble fini et  $\text{Card}(E) = p\text{Card}(F)$ .

2. (*principe des tiroirs*) Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, p$  éléments distincts d'un ensemble  $E$ , répartis entre une famille de  $n$  sous-ensembles de  $E$ . Si  $n < p$  montrer qu'il existe au moins un ensemble de la famille contenant au moins deux éléments parmi les  $\alpha_i$ . (on pourra raisonner par l'absurde)

**Exercice 244** Montrer par récurrence sur  $n$  que si  $A_1, \dots, A_n \subset E$  alors  $\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ .

**Exercice 245** Soit  $p_n(k)$  le nombre de permutations de  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k$  points fixes, montrer alors que :

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

Interpréter.

**Exercice 246** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $nm \in \mathbb{N}^*$ , où  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , et  $P_{n,m}$  l'ensemble des partitions de  $E$  en  $n$  parties à  $m$  éléments chacune. Montrer que :

$$N_{n,m} = \text{card}(P_{n,m}) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}.$$

(Indication : on peut procéder par récurrence.)

**Exercice 247** L'histoire :  $n$  personnes apportent chacune un cadeau à une fête, et chacun tire au sort un cadeau dans le tas formé par tous les présents apportés. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne reparte avec son cadeau? Que devient cette probabilité quand le nombre de personnes devient très grand, i.e. :  $n \rightarrow \infty$ ? (On remarquera que l'intuition met en évidence deux effets contradictoires : plus de personnes c'est plus de proba qu'une personne ait son cadeau car... il y a plus de personnes, mais c'est aussi plus de cadeaux, donc une proportion plus élevée de cadeaux "acceptables").

Soit  $S_n = \sigma(\{1, \dots, n\})$ . On dit que  $\sigma \in S_n$  est un dérangement si  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \sigma(i) \neq i$ . On note  $A_i = \{\sigma \in S_n / \sigma(i) = i\}$  et  $D_n$  l'ensemble des dérangements.

1. Calculer  $\text{Card}(A_i)$ .
2. Exprimer  $S_n - D_n$  en fonction des  $A_i$ .
3. En déduire  $\text{Card}(D_n)$  (on pourra utiliser l'exercice 244).
4. Déterminer la limite de  $\frac{\text{Card } D_n}{\text{Card } S_n}$ . (on rappelle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}) = e^x$ ).

**Exercice 248** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ ,  $\mathfrak{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ , avec  $k$  classes d'équivalences et  $r$  couples  $(x, y) \in E^2$  tels que  $x \mathfrak{R} y$ . Montrer que  $n^2 \leq kr$ .

## 6 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

### 6.1 Divisibilité, division euclidienne

**Exercice 249** Combien  $15!$  admet-il de diviseurs?

[Exercice corrigé]

**Exercice 250** Trouver le reste de la division par 13 du nombre  $100^{1000}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 251** Sachant que l'on a  $96842 = 256 \times 375 + 842$ , déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

[Exercice corrigé]

**Exercice 252** Soient  $m \geq 1$  et  $n \geq 2$  des entiers; montrer que :

1.  $n - 1 | n^m - 1$ ;
2.  $(n - 1)^2 | n^m - 1$  si et seulement si  $n - 1 | m$ .

**Exercice 253** Soit  $a$  un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre  $a(a^2 - 1)$  et, plus généralement,  $a(a^{2^n} - 1)$  est divisible par 6.

**Exercice 254** Démontrer que le nombre  $7^n + 1$  est divisible par 8 si  $n$  est impair; dans le cas  $n$  pair, donner le reste de sa division par 8.

[Exercice corrigé]

**Exercice 255** Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 8, 15, 18 et 24, donne respectivement pour reste 7, 14, 17 et 23?

**Exercice 256** Montrer que si  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels tels que  $x^2$  divise  $y^2$ , alors  $x$  divise  $y$ . Application : démontrer, par l'absurde, que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.

**Exercice 257** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 258** Trouver tous les entiers relatifs  $n$  tels que  $n^2 + n + 7$  soit divisible par 13.

**Exercice 259** On considère le nombre  $m = 2^n p$ , dans lequel  $n$  désigne un entier naturel quelconque et  $p$  un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de  $m$ , y compris 1 et  $m$  lui-même, et calculer, en fonction de  $m$  et  $p$ , la somme  $S$  de tous ces diviseurs.

**Exercice 260** Le diviseur d'une division est égal à 45 ; le reste est le carré du quotient. Calculer le dividende entier naturel.

**Exercice 261** Trouver le plus petit entier naturel  $n$  telle que le développement décimal de  $1/n$  admette une plus petite période de longueur 5, c'est-à-dire  $1/n = 0, abcde abcde ab\dots$  avec  $a, b, \dots, e \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

**Exercice 262** Les nombres  $a, b, c, d$  étant des éléments non nuls de  $\mathbb{Z}$ , dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si  $a$  divise  $b$  et  $c$ , alors  $c^2 - 2b$  est multiple de  $a$ .
2. S'il existe  $u$  et  $v$  entiers tels que  $au + bv = d$  alors  $\text{pgcd}(a, b) = |d|$ .
3. Si  $a$  est premier avec  $b$ , alors  $a$  est premier avec  $b^3$ .
4. Si  $a$  divise  $b + c$  et  $b - c$ , alors  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $c$ .
5. Si 19 divise  $ab$ , alors 19 divise  $a$  ou 19 divise  $b$ .
6. Si  $a$  est multiple de  $b$  et si  $c$  est multiple de  $d$ , alors  $a + c$  est multiple de  $b + d$ .
7. Si 4 ne divise pas  $bc$ , alors  $b$  ou  $c$  est impair.
8. Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  ne divise pas  $c$ , alors  $a$  ne divise pas  $c$ .
9. Si 5 divise  $b^2$ , alors 25 divise  $b^2$ .
10. Si 12 divise  $b^2$ , alors 4 divise  $b$ .
11. Si 12 divise  $b^2$ , alors 36 divise  $b^2$ .
12. Si 91 divise  $ab$ , alors 91 divise  $a$  ou 91 divise  $b$ .

**Exercice 263** On définit les trois ensembles suivants :

$$E_1 = \{7n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$E_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \text{ est multiple de } 4\}$$

$$E_3 = \{28n, n \in \mathbb{N}\}$$

1. Pour  $1 \leq i, j \leq 3$ , déterminer si on a l'inclusion  $E_i \subset E_j$ .
2. Ecrire  $E_1 \cap E_2$  sous la forme  $E = \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)\}$ . Montrer que  $E_1 \cap E_2 = E_3$ .

**Exercice 264** Montrer que si  $r$  et  $s$  sont deux nombres entiers naturels somme de deux carrés d'entiers alors il en est de même pour le produit  $rs$ .

**Exercice 265** Soit  $n$  un entier relatif. Montrer que soit 8 divise  $n^2$ , soit 8 divise  $n^2 - 1$ , soit 8 divise  $n^2 - 4$ .

**Exercice 266** Étant donnés deux nombres relatifs  $n$  et  $p$  montrer que soit  $np$  est pair, soit  $n^2 - p^2$  est divisible par 8.

**Exercice 267** Montrer que si  $n$  est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de  $n$  par 4 n'est jamais égal à 3.

[Exercice corrigé]

**Exercice 268** 1. Soit  $n$  un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que  $n^2 + 1$  est divisible par 5.

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $n^5 - n$  est divisible par 5.

**Exercice 269** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que parmi les trois entiers  $n.(n + 1)$ ,  $n.(n + 2)$  et  $(n + 1).(n + 2)$ , il y en a exactement deux qui sont divisibles par 3.

**Exercice 270** 1. Pour tout couple de nombres réels  $(x, y)$  montrer, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a la relation

$$(*) \quad x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Indication : on pourra écrire de deux manières différentes la quantité  $y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$ .

2. Soit  $(a, b, p)$  des entiers éléments de  $\mathbb{N}$ . En utilisant la formule (\*), montrer que s'il existe un entier  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $b = a + pl$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $b^n = a^n + pm$ .

3. Soient  $a, b, p$  des entiers éléments de  $\mathbb{N}$ , en utilisant la question 2, montrer que si  $a - b$  est divisible par  $p$ ,

$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$

est aussi divisible par  $p$ . En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule (\*), que si  $a - b$  est divisible par  $p^n$  i.e. il existe un entier  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $a - b = l.p^n$ , alors  $a^p - b^p$  est divisible par  $p^{n+1}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 271** Calculer  $2000^{2000}$  modulo 7 et  $2^{500}$  modulo 3.

**Exercice 272** Soit  $a, b \in \mathbb{Z}^2$  dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de  $a^2 - b^2$ .

**Exercice 273** 1. Montrer que 7 divise  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  ;

2. montrer que que 11 divise

$$5^{10^{5^{10^{5^{10}}}}} + 10^{5^{10^{5^{10^5}}}} ;$$

3. trouver un critère de divisibilité par 8 puis par 6.

**Exercice 274** Montrer que pour tout  $n > 0$  :

1. 7 divise  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

2. 11 divise  $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$

3. 6 divise  $5n^3 + n$



4. 8 divise  $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ .

**Exercice 275** 1. Déterminer la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de  $3^{500}$ .

2. On se donne 51 nombres compris entre 1 et 100. Montrer que parmi ces nombres il y en a nécessairement au moins deux tels que l'un divise l'autre. Montrer que l'on peut toujours trouver un ensemble de 50 nombres compris entre 1 et 100 ne vérifiant pas la propriété de divisibilité ci-dessus.

**Exercice 276** Trouver les entiers positifs  $n$  tels que  $n - 1$  divise  $n^2 + 1$ .

**Exercice 277** Montrer que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , 4 ne divise pas  $n^2 + 1$ .

**Exercice 278** Montrer que pour chaque entier positif  $n$ , 49 divise  $2^{3n+3} - 7n - 8$ .

**Exercice 279** Trouver tous les entiers positifs  $a$  tels que  $a^{10} + 1$  est divisible par 10.

**Exercice 280** Quel est le chiffre des unités de  $19971997^{10}$  ?

**Exercice 281** Montrer que :

1. Si un entier est de la forme  $6k + 5$ , alors il est nécessairement de la forme  $3k - 1$ , alors que la réciproque est fautive.
2. Le carré d'un entier de la forme  $5k + 1$  est aussi de cette forme.
3. Le carré d'un entier est de la forme  $3k$  ou  $3k + 1$ , mais jamais de la forme  $3k + 2$ .
4. Le carré d'un entier est de la forme  $4k$  ou  $4k + 1$ , mais jamais de la forme  $4k + 2$  ni de la forme  $4k + 3$ .
5. Le cube de tout entier est de la forme  $9k$ ,  $9k + 1$  ou  $9k + 8$ .
6. Si un entier est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième, et il est de la forme  $7k$  ou  $7k + 1$ .

**Exercice 282** Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que :

1.  $n|n + 8$ .
2.  $n - 1|n + 11$ .
3.  $n - 3|n^3 - 3$ .

**Exercice 283** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $(n|2k + 1$  et  $n|9k + 4)$ .

**Exercice 284** Montrer que  $\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  il existe un unique  $r(a) \in \{0, \dots, b - 1\}$  tel qu'il existe  $q \in \mathbb{N}$  avec  $a = bq + r(a)$ .

1. En utilisant ceci pour  $b = 13$ , déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $13|n^2 + n + 7$ .
2. Si  $a \in \mathbb{N}$  et  $b = 7$ , déterminer les valeurs possibles de  $r(a^2)$  (on rappelle que  $r(a^2)$  doit appartenir à  $\{0, \dots, b - 1\}$ ).  
Montrer alors que  $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2$  ( $7|x^2 + y^2$ ) ssi ( $7|x$  et  $7|y$ ).
3. Montrer qu'un entier positif de la forme  $8k + 7$  ne peut pas être la somme de trois carrés d'entiers.

**Exercice 285** 1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie  $x^2 = 0[8]$  ou  $x^2 = 4[8]$ .
3. Soient  $a, b, c$  trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de  $a^2 + b^2 + c^2$  et celui de  $2(ab + bc + ca)$ .
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que  $ab + bc + ca$  non plus.

[Exercice corrigé]

## 6.2 Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

**Exercice 286** Montrer qu'il est équivalent dans  $\mathbb{Z}$  de dire  $m$  divise  $n$ , ou  $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$ .

**Exercice 287** 1. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Caractériser le sous-groupe  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ . Caractériser les sous-groupes suivants :

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}; \quad 5\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z}; \quad 5\mathbb{Z} \cap 25\mathbb{Z}.$$

2. Montrer que toute intersection de sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Caractériser l'intersection d'une famille finie de sous-groupes. Caractériser les sous-groupes suivants :

$$\bigcap_{n=1}^{17} 2^n \mathbb{Z}; \quad 4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} \cap 8\mathbb{Z} \cap 19\mathbb{Z} \cap 35\mathbb{Z}.$$

**Exercice 288** 1. Déterminer  $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ . Est-ce un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ ?

2. Déterminer :  $7\mathbb{Z} \cup 49\mathbb{Z}$ ;  $5\mathbb{Z} \cup 45\mathbb{Z}$ ;  $\bigcup_{n=1}^{28} 2^n \mathbb{Z}$ . Ces ensembles sont-ils des sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ ?

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une réunion de deux sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  soit un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 289** 1. Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{Z}$ ; montrer que la famille des sous-groupes contenant  $A$  n'est pas vide. Soit  $H$  une partie contenant  $A$ . Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- i)  $H$  est l'intersection des sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  qui contiennent  $A$ ,
- ii)  $H$  est le plus petit sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  qui contient  $A$ ,
- iii)  $H$  est l'ensemble des sommes finies d'éléments de  $A$  ou d'éléments dont l'opposé est dans  $A$ .

Si ces conditions sont vérifiées on dit que  $H$  est le sous-groupe engendré par  $A$ .

2. Soient  $m\mathbb{Z}$  et  $n\mathbb{Z}$  deux sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ . Montrer que

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{mu + nv \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$$

- a) est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ ,
  - b) contient  $m\mathbb{Z}$  et  $n\mathbb{Z}$ ,
  - c) est contenu dans tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  qui contient  $m\mathbb{Z}$  et  $n\mathbb{Z}$ .
  - d) Si  $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ , que peut-on dire de  $d$ ?
3. Déterminer les sous-groupes engendrés par :  $14\mathbb{Z} \cup 35\mathbb{Z}$ ;  $4\mathbb{Z} \cup 8\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \cup 64\mathbb{Z}$ ;  $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ;  $4\mathbb{Z} \cup 21\mathbb{Z}$ ;  $5\mathbb{Z} \cup 25\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$ ;  $\{70, 4\}$ .

## 6.3 Pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

**Exercice 290** Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

[Exercice corrigé]

**Exercice 291** 1. Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.

2. Montrer que si  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$  sont des entiers de pgcd  $d$  et, si on pose  $a = da'$  ;  $b = db'$ , le ppcm de  $a$  et  $b$  est  $da'b'$ .

3. Montrer que si  $a, b, c$  sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\text{ppcm}(a, b, c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c).$$

**Exercice 292** Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

[Exercice corrigé]

**Exercice 293** Si  $a, b, c, d$  sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a, b, c, d) = ((a, b), (c, d))$$

où  $(, )$  désigne le pgcd.

**Exercice 294** 1. Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution  $(x, y)$  en entiers relatifs  $x$  et  $y$ , il faut et il suffit que le pgcd de  $a$  et  $b$  divise  $c$ .

2. Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1,$$

$$7x - 9y = 6,$$

$$11x + 17y = 5.$$

**Exercice 295** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $a \geq b \geq 1$  et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ .

1. Montrer que  $\text{pgcd}(a + b, a - b) = 1$  ou 2,

2. Si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , montrer que  $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$ ,

3. Si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , montrer que  $\text{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) = 1$  ou 2.

**Exercice 296** Calculer par l'algorithme d'Euclide :  $18480 \wedge 9828$ . En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

[Exercice corrigé]

**Exercice 297** Déterminer le pgcd de 99 099 et 43 928. Déterminer le pgcd de 153 527 et 245 479.

**Exercice 298** Déterminer l'ensemble de tous les couples  $(m, n)$  tels que

$$955m + 183n = 1.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 299** Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \text{pgcd}(720, 252) \quad b = \text{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $720u + 252v = a$ .

**Exercice 300** Démontrer :

$$a \wedge (b_1 b_2) = 1 \Leftrightarrow (a \wedge b_1 = 1 \text{ et } a \wedge b_2 = 1),$$

puis par récurrence :

$$a \wedge (b_1 \dots b_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad a \wedge b_i = 1.$$

**Exercice 301** Démontrer pour  $m, n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a^m \wedge b^n = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1.$$

**Exercice 302** Déterminer deux entiers naturels connaissant leur somme, 1008, et leur pgcd, 24.

**Exercice 303** Notons  $a = 1\ 111\ 111\ 111$  et  $b = 123\ 456\ 789$ .

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
2. Calculer  $p = \text{pgcd}(a, b)$ .
3. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = p$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 304** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers ( $m > n > 0$ ) et  $a \geq 2$  un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de  $a^m - 1$  par  $a^n - 1$  est  $a^r - 1$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $n$ , et que le pgcd de  $a^m - 1$  et  $a^n - 1$  est  $a^d - 1$ , où  $d$  est le pgcd de  $m$  et  $n$ .

**Exercice 305** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $1665x + 1035y = 45$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 306** Montrer qu'il n'existe pas d'entiers  $m$  et  $n$  tels que

$$m + n = 101 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(m, n) = 3$$

**Exercice 307** Soit  $m$  et  $n$  deux entiers positifs.

1. Si  $\text{pgcd}(m, 4) = 2$  et  $\text{pgcd}(n, 4) = 2$ , montrer que  $\text{pgcd}(m + n, 4) = 4$ .
2. Montrer que pour chaque entier  $n$ , 6 divise  $n^3 - n$ .
3. Montrer que pour chaque entier  $n$ , 30 divise  $n^5 - n$ .
4. Montrer que si  $m$  et  $n$  sont des entiers impairs,  $m^2 + n^2$  est pair mais non divisible par 4.
5. Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
6. Montrer que si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , alors
  - $\text{pgcd}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$ ,
  - $\text{pgcd}(2a + b, a + 2b) \in \{1, 3\}$ ,
  - $\text{pgcd}(a^2 + b^2, a + b) \in \{1, 2\}$ ,
  - $\text{pgcd}(a + b, a^2 - 3ab + b^2) \in \{1, 5\}$ .

**Exercice 308** Trouver une CNS pour que  $ax + b \equiv 0 \pmod{n}$  ait une solution.

**Exercice 309** 1. Calculer  $\text{pgcd}(18, 385)$  par l'algorithme d'Euclide, en déduire un couple  $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$  solution de l'équation  $18u + 385v = 1$ , avec  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ .

2. Fournir enfin l'ensemble des solutions entières de

$$18u + 385v = 1; \quad 18u + 385v = 3; \quad 54u + 1155v = 3; \quad 54u + 1155v = 5.$$

**Exercice 310** Trouver  $a$  et  $b$  entiers naturels tels que

1.  $a + b = 2070$  et  $\text{ppcm}(a, b) = 9180$  ;
2.  $a^2 + b^2 = 5409$  et  $\text{ppcm}(a, b) = 360$  (on pourra commencer par montrer que  $\text{pgcd}(a, b)$  divise  $\text{pgcd}(5409, 360)$  et considérer ensuite différents cas).

**Exercice 311** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations :  $35x \equiv 7 \pmod{4}$ ;  $22x \equiv 33 \pmod{5}$

**Exercice 312** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système suivant :

$$S : \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \end{cases}$$

On recherchera d'abord une solution particulière.

**Exercice 313** 1. Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations :  $x^2 \equiv 2 \pmod{6}$ ;  $x^3 \equiv 3 \pmod{9}$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes :  $5x^2 + 2xy - 3 = 0$  ;  $y^2 + 4xy - 2 = 0$ .

**Exercice 314** Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 17x + 6y = 1 & \text{b) } 27x + 25y = 1 \\ \text{c) } 118x + 35y = 1 & \text{d) } 39x + 26y = 1 \end{array}$$

**Exercice 315** Montrer que si  $a$  divise  $42n + 37$  et  $7n + 4$ , pour une valeur de  $n$  donnée, alors  $a$  divise 13. Quelles sont les valeurs possibles pour  $n$  ?

**Exercice 316** Trouver  $\text{pgcd}(-357, 629)$  et trouver des entiers  $x$  et  $y$  tels que

$$\text{pgcd}(-357, 629) = -357x + 629y$$

**Exercice 317** Trouver  $\text{pgcd}(2183, 6313) = d$  et trouver des entiers  $x$  et  $y$  tels que

$$d = 2183x + 6313y$$

**Exercice 318** Supposons  $\text{pgcd}(a, b) = d$  et soit  $x_0$  et  $y_0$  des entiers tels que  $d = ax_0 + by_0$ . Montrer que :

1.  $\text{pgcd}(x_0, y_0) = 1$ ,
2.  $x_0$  et  $y_0$  ne sont pas uniques.

**Exercice 319** Soit  $a, b, c$  des entiers.

1. Montrer que  $\text{pgcd}(ca, cb) = |c| \text{pgcd}(a, b)$ .
2. Montrer que  $\text{pgcd}(a^2, b^2) = (\text{pgcd}(a, b))^2$ .
3. Montrer que si  $\text{pgcd}(a, b) = 1$  et si  $c$  divise  $a$ , alors  $\text{pgcd}(c, b) = 1$ .
4. Montrer que  $\text{pgcd}(a, bc) = 1 \iff \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$ .
5. Montrer que si  $\text{pgcd}(b, c) = 1$  alors  $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, b)\text{pgcd}(a, c)$ .
6. Montrer que  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + b, \text{ppcm}(a, b))$ .

**Exercice 320** En divisant un nombre par 8, un élève a obtenu 4 pour reste ; en divisant ce même nombre par 12, il a obtenu 3 pour reste. Qu'en pensez-vous ?

Le fort en calcul de la classe, qui ne fait jamais d'erreur, a divisé le millésime de l'année par 29, il a trouvé 25 pour reste ; il a divisé le même millésime par 69, il a trouvé 7 pour reste. En quelle année cela se passait-il ?

**Exercice 321** Trouver deux nombres sachant que leur somme est 581 et que le quotient de leur PPCM par leur pgcd est 240.

**Exercice 322** Trouver les solutions entières de l'équation :

$$102x - 18018y = 18.$$

Combien y a-t-il de solutions telles que  $x$  et  $y$  soient compris entre 0 et 4000 ?

**Exercice 323** Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

**Exercice 324** Trouver les couples de nombres  $a$  et  $b$ , divisibles par 3, vérifiant les propriétés suivantes : leur ppcm est 7560, et si on augmente chacun de ces nombres d'un tiers de sa valeur, le pgcd des deux nombres obtenus est 84.

**Exercice 325** Un terrain rectangulaire dont les dimensions en mètres  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers, a pour aire  $3024 \text{ m}^2$ . Calculer son périmètre sachant que le pgcd de  $a$  et  $b$  est 6. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

**Exercice 326** 1. Dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , écrire l'ensemble des multiples de  $\bar{x}$ , classe de  $x$ , pour  $x$  variant de 0 à  $n - 1$  dans chacun des cas suivants :  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

2. Dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , montrer l'équivalence des trois propositions :

- i)  $\bar{x}$  est inversible ;
- ii)  $x$  et  $n$  sont premiers entre eux ;
- iii)  $\bar{x}$  engendre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , c'est à dire que l'ensemble des multiples de  $\bar{x}$  est  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

3. La classe de 18 est-elle inversible dans  $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$  ? Si oui, quel est son inverse ? (On pourra utiliser le théorème de Bézout).

**Exercice 327** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations suivantes :

- 1.  $91x - 65y = 156$ .
- 2.  $135x - 54y = 63$ .
- 3.  $72x + 35y = 13$ .

**Exercice 328** Résoudre dans  $\mathbb{N}$  les équations suivantes :

- 1.  $31x - 13y = 1$ .
- 2.  $31x - 13y = -1$ .

*Application* : Au bord d'une piscine pleine d'eau, on dispose d'une cuve fixe de 31 litres munie à sa base d'un robinet de vidange, et d'un seau de 13 litres. Expliquer comment opérer pour obtenir exactement 1 litre dans le seau.

**Exercice 329** Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $77x + 105y = 2401$ .

**Exercice 330** Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.

- 1. Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière (à condition bien sûr que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets).
- 2. On suppose que vous devez payer une somme  $S$ , que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si  $S = 14$ , mais pas si  $S = 13$  ou si  $S = 15$ . . . Montrer qu'il est toujours possible de payer si  $S$  est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de  $S$  telle qu'il soit impossible de payer  $S$  ?

**Exercice 331** Trouver tous les points à coordonnées entières du plan d'équation  $6x + 10y + 15z = 1997$ . Combien y a-t-il de solutions dans  $\mathbb{N}^3$  ?

**Exercice 332** 1. Trouver tous les points à coordonnées entières de la droite de l'espace d'équations 
$$\begin{cases} 4x - 2y - z - 5 = 0 \\ x + 3y - 4z - 7 = 0 \end{cases} .$$

2. Même question avec la droite 
$$\begin{cases} x + 3y - 5z - 5 = 0 \\ 4x - 2y + z + 13 = 0 \end{cases} .$$

**Exercice 333** Résoudre dans  $\mathbb{N}$  et dans  $\mathbb{Z}$  l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$$

**Exercice 334** Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

**Exercice 335** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers relatifs. On note  $d$  leur pgcd. Construisons les suites  $a_n$  et  $b_n$   $n \in \mathbb{N}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ b_0 &= b \end{aligned}$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_{n+1} = b_n$  et  $b_{n+1} = r$  où  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a_n$  par  $b_n$ .

1. Montrer que si  $d_n$  est le pgcd de  $a_n$  et  $b_n$  alors  $d_n$  est également le pgcd de  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$ .
2. Dédire de la question précédente que  $d$  est le pgcd des nombres  $a_n$  et  $b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que la suite  $b_n$  est strictement décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. Dédire de ce qui précède que pour tout couple d'entiers relatifs  $(a, b)$  il existe un couple d'entiers relatifs  $(u, v)$  tel que :

$$d = au + bv.$$

## 6.4 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

**Exercice 336** Soient  $a, b$  des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1.  $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$  ;
2.  $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$  ;
3.  $(2^a - 1 \text{ premier}) \Rightarrow (a \text{ premier})$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 337** Démontrer que, si  $a$  et  $b$  sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers  $a + b$  et  $ab$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 338** Résoudre l'équation  $29x - 11y = 1$  dans  $\mathbb{Z}$ .

On considère maintenant l'équation  $29x - 11y = 5$ . Dédire de ce qui précède une solution particulière de cette équation, puis en donner la solution générale.

**Exercice 339** Soit  $p$  un nombre premier.

1. Montrer que  $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$  on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurrence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 340** 1. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 &\Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{N}^3, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ &\text{pgcd}(x', y', z') = 1 \\ &x'^2 + y'^2 = z'^2 \\ &x = nx' \text{ et } y = ny' \text{ et } z = nz'. \end{aligned}$$

2. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$  tels que  $x^2 + y^2 = z^2$ . On suppose que  $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$

- (a) Montrer que  $x$  et  $y$  ne sont pas de mêmes parité.
- (b) On suppose  $x$  pair et  $y$  impair. On pose :

$$x = 2u, \quad z - y = 2v, \quad z + y = 2w$$

avec  $(u, v) \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $v$  et  $w$  sont premiers entre eux.

- (c) Montrer que

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

avec  $m$  et  $n$  entiers naturels de parité différentes.

- (d) Montrer que si

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

alors

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

**Exercice 341 (Nombres de Fermat)** 1. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$  on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Montrer que pour  $m \neq n$ ,  $F_n$  et  $F_m$  sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

[Exercice corrigé]

**Exercice 342** Les nombres  $a, b, c, d$  étant des éléments non nuls de  $\mathbb{Z}$ , dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$ , alors  $a$  divise  $c$ .
2. Si  $a$  divise  $b$  et  $c$ , alors  $a$  divise  $2b + 3c$ .
3. S'il existe  $u$  et  $v$  entiers tels que  $au + bv = 4$  alors  $\text{pgcd}(a, b) = 4$ .
4. Si  $7a - 9b = 1$  alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.



5. Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  et  $c$  divise  $a$ , alors  $|a| = |b|$ .
6. «  $a$  et  $b$  premiers entre eux » équivaut à «  $\text{ppcm}(a, b) = |ab|$  ».
7. Si  $a$  divise  $c$  et  $b$  divise  $d$ , alors  $ab$  divise  $cd$ .
8. Si 9 divise  $ab$  et si 9 ne divise pas  $a$ , alors 9 divise  $b$ .
9. Si  $a$  divise  $b$  ou  $a$  divise  $c$ , alors  $a$  divise  $bc$ .
10. «  $a$  divise  $b$  » équivaut à «  $\text{ppcm}(a, b) = |b|$  ».
11. Si  $a$  divise  $b$ , alors  $a$  n'est pas premier avec  $b$ .
12. Si  $a$  n'est pas premier avec  $b$ , alors  $a$  divise  $b$  ou  $b$  divise  $a$ .

**Exercice 343** 1. Soit  $p \in \mathbb{Z}$  un nombre premier. Montrer que si  $a \in \mathbb{Z}$  n'est pas congru à 0 modulo  $p$  alors  $p$  ne divise pas  $a$  et donc  $\text{pgcd}(a, p) = 1$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{Z}$  non congru à 0 modulo  $p$  avec  $p$  premier. Montrer en utilisant le a) qu'il existe  $u \in \mathbb{Z}$  non congru à 0 modulo  $p$  vérifiant  $au \equiv 1[p]$ . (Remarquer que cela donne un inverse de  $a$  modulo  $p$ ).
3. Montrer que si  $p$  n'est pas premier, il existe des éléments  $a, u \in \mathbb{Z}$  non nuls modulo  $p$  tels que  $au \equiv 0[p]$ .

**Exercice 344** 1. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\text{pgcd}((n+1)^2, n+2) = 1$ .

**Exercice 345** Prouver que pour vérifier qu'un entier  $p$  est premier, il suffit de vérifier qu'il n'a pas de diviseurs inférieurs ou égaux à  $\sqrt{p}$ .

**Exercice 346 (Théorème de Wilson)** Démontrer que tout nombre premier  $p$  divise  $(p-1)! + 1$ .

**Exercice 347** Montrer que les nombres suivants ne sont pas premiers :

1.  $n^4 - 20n^2 + 4$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$  pour  $n \geq 2$ .
3.  $a^4 + 4b^4$  pour  $a, b \geq 2$ .

**Exercice 348** Soit  $X$  l'ensemble des nombres premiers de la forme  $4k+3$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $X$  est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme  $4k+1$  est encore de cette forme.
3. On suppose que  $X$  est fini et on l'écrit alors  $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ .  
Soit  $a = 4p_1p_2 \dots p_n - 1$ . Montrer par l'absurde que  $a$  admet un diviseur premier de la forme  $4k+3$ .
4. Montrer que ceci est impossible et donc que  $X$  est infini.

[Exercice corrigé]

**Exercice 349** Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n + 1$  soit premier, montrer que  $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$ . Que penser de la conjecture :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$  est premier ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 350** Soit  $n$  un nombre premier et  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ , montrer que  $n$  divise  $C_n^p$ .

**Exercice 351** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers supérieurs à 2 premiers entre eux, montrer que :

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, n \in \{ax + by \mid (x, y) \in \mathbb{N}^2\}.$$

## 6.5 Divers

**Exercice 352** Résoudre en nombres entiers naturels l'équation :

$$(x + 1)(y + 2) = 2xy.$$

**Exercice 353** Montrer que  $(0, 0, 0)$  est le seul triplet  $(x, y, z)$  d'entiers naturels tels que l'on ait :

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

**Exercice 354** Déterminer les solutions des équations :

$$x^2 - 5x - 11 \equiv 0 \pmod{17}; \quad \cos((n^2 - 8n + 2)\pi/7) = 1$$

**Exercice 355** Un groupe de  $N \geq 2$  personnes se réunit. Montrer qu'au moins deux personnes ont serré le même nombre de mains. On pourra séparer les deux cas suivants : soit tout le monde a serré au moins une main, soit il existe quelqu'un qui n'a serré aucune main.

## 7 Polynômes

### 7.1 Division euclidienne

**Exercice 356** Effectuer la division euclidienne du polynôme  $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$  par  $Q = X^2 - 1$ . Même exercice lorsque  $P = X^4 - 2X \cos(2\varphi) + 1$  et  $Q = X^2 - 2X \cos(\varphi) + 1$ .

**Exercice 357** Soit  $P$  un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  est 1 et celui de la division de  $P$  par  $X - b$  est  $-1$ , ( $a \neq b$ ), quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  ?

**Exercice 358** Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^n + X + 1$  par le polynôme  $(X - 1)^2$ .

**Exercice 359** Pour quelles valeurs de  $m$  le polynôme  $P = (X + 1)^m - X^m - 1$  est-il divisible par le polynôme  $Q = X^2 + X + 1$  ?

**Exercice 360** Montrer que le polynôme  $P(X) - X$  divise le polynôme  $P(P(X)) - X$ .

**Exercice 361** Déterminer  $a, b \in \mathbb{Z}$  de façon à ce que le polynôme  $aX^{n+1} - bX^n + 1$  soit divisible par le polynôme  $(X - 1)^2$ . Calculer alors le quotient des deux polynômes.

**Exercice 362** Existe-t-il un polynôme  $P$  de degré 7 tel que  $(X - 1)^4$  divise  $P(X) + 1$  et  $(X + 1)^4$  divise  $P(X) - 1$  ?

**Exercice 363** Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1.  $P = 1$  par  $Q = 1 - X$ , à l'ordre  $n$ ,
2.  $P = 1 + X$  par  $Q = 1 + X^2$  à l'ordre 5,
3.  $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12}$  par  $Q = 1 - 2X^2 + X^4$  à l'ordre 5.

**Exercice 364** Effectuer les divisions euclidiennes de

- $3X^5 + 4X^2 + 1$  par  $X^2 + 2X + 3$ ,  
 $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$  par  $X^3 + X + 2$ ,  
 $X^4 - X^3 + X - 2$  par  $X^2 - 2X + 4$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 365** Dans  $\mathbb{C}[X]$ , effectuer les divisions euclidiennes de  
 $X^2 - 3iX - 5(1+i)$  par  $X - 1 + i$ ,  
 $4X^3 + X^2$  par  $X + 1 + i$ .

**Exercice 366** Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 367** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes distincts,  $m$  et  $n$  deux entiers naturels. Montrer que si les polynômes  $(X - a)^m$  et  $(X - b)^n$  divisent un polynôme  $P$ , alors le polynôme  $(X - a)^m(X - b)^n$  divise  $P$ .

**Exercice 368** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , quel est le reste de la division de  $X^n + X + b$  par  $(X - a)^2$  ?

**Exercice 369** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que le polynôme  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ . Trouver le quotient si  $n = 2$ .

**Exercice 370** Trouver les polynômes  $P$  tels que  $P + 1$  soit divisible par  $(X - 1)^4$  et  $P - 1$  par  $(X + 1)^4$  :

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé  $P'$ .

Combien y a-t-il de solutions de degré  $\leq 7$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 371** Effectuer la division de  $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$  par  $B = X^3 + X^2 + 1$  :

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par  $X^5$ ) suivant les puissances croissantes.

[Exercice corrigé]

**Exercice 372** Déterminer  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $X^2 + 2$  divise  $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ .

**Exercice 373** Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(\sin aX + \cos a)^n$  par  $X^2 + 1$ .

**Exercice 374** Soit  $P$  un polynôme dont le reste de la division euclidienne par  $X - 1$  est 7 et par  $X + 5$  est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 4X - 5$  ?

**Exercice 375** Effectuer la division euclidienne de  $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$  par  $X^2 - 5X + 4$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 376** Soit  $n \geq 1$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$  par  $(X - 1)^2$ .

**Exercice 377** Soient  $P, Q \in K[X]$  tels que  $X^2 + X + 1$  divise  $P(X^3) + XQ(X^3)$ . Montrer que  $P(1) = Q(1) = 0$ . Réciproque ?

**Exercice 378** Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$  ?

[Exercice corrigé]

## 7.2 Pgcd

**Exercice 379** Calculer  $\text{pgcd}(P, Q)$  lorsque :

1.  $P = X^3 - X^2 - X - 2$  et  $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ ,
2.  $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $Q = X^3 + X + 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 380** Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

- $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$  et  $X^4 + 2X^3 + X + 2$ ,  
 $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$  et  $X^3 + X^2 - X - 1$ ,  
 $X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$  et  $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 381** Déterminer  $A, B \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$ .

**Exercice 382** Montrer qu'il existe deux polynômes  $U, V$ , vérifiant :  $(\star) (X-1)^n U + X^n V = 1$ . Déterminer  $U_1$  et  $V_1$  de degré strictement inférieur à  $n$ , satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes  $U, V$  vérifiant  $(\star)$ .

**Exercice 383** Soient  $P, Q$  deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors  $P^n$  et  $Q^m$  sont premiers entre eux où  $n, m$  sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que  $P + Q$  et  $PQ$  sont premiers entre eux.

**Exercice 384** Soit  $n$  un entier positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes  $(X^n - 1)$  et  $(X - 1)^n$ .
2. Pour  $n = 3$  démontrer qu'il existe un couple de polynômes  $(U, V)$  tel que  $(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$ . En donner un.

**Exercice 385** Montrer que les éléments  $X^2 + X, X^2 - X, X^2 - 1$  de  $\mathbb{R}[X]$  sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux.

**Exercice 386** Trouver tous les polynômes  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $AU + BV$  soit un pgcd de  $A$  et  $B$  avec  $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$  et  $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$ .

**Exercice 387** Calculer le pgcd  $D$  des polynômes  $A$  et  $B$  définis ci-dessous. Trouver des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $D = AU + BV$ .

1.  $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$  et  $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$ .
2.  $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$  et  $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 388** Trouver le pgcd des trois polynômes :

$$\begin{aligned} A &= X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 2 \\ B &= X^2 + 3X + 2 \\ C &= X^3 + 2X^2 + X + 2. \end{aligned}$$

**Exercice 389** Soit les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\begin{aligned} A &= (X + 3)^2(X + 1)(X^2 + 1)^3 \\ B &= (X + 3)^2(X + 2)^2(X^2 + 1) \\ C &= (X + 3)(X + 2)(X^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

1. Combien  $A$  possède-t-il de diviseurs normalisés ? et  $B$  ? et  $C$  ?
2. Écrire le pgcd et le ppcm de  $A$  et  $B$ .
3. Écrire le pgcd et le ppcm des trois polynômes  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 390** 1. Trouver le pgcd de  $X^{24} - 1$  et  $X^{15} - 1$  ; le pgcd de  $X^{280} - 1$  et  $X^{60} - 1$ .  
 2. Montrer que quels que soient les entiers positifs  $b$  et  $q$ ,  $X^b - 1$  divise  $X^{bq} - 1$ . En déduire que le reste de la division de  $X^a - 1$  par  $X^b - 1$  est  $X^r - 1$  où  $r$  est le reste de la division dans  $\mathbb{N}$  de  $a$  par  $b$ . Quel est alors le pgcd de  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$  ? Application : trouver le pgcd de  $X^{5400} - 1$  et  $X^{1920} - 1$ .  
 3.  $P$  étant un polynôme quelconque de  $\mathbb{C}[X]$ , et  $a$  et  $b$  deux entiers naturels, quel est le pgcd de  $P^a - 1$  et  $P^b - 1$  ? Indication : utiliser le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 391** Soit  $A \in \mathbb{C}[X]$  et  $B \in \mathbb{C}[X]$ .

1. A-t-on  $\text{pgcd}(A, B) = 1 \iff \text{pgcd}(A + B, AB) = 1$  ?
2. A-t-on  $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(A + B, AB)$  ?

**Exercice 392** Soit  $n$  un entier strictement positif.

1. Démontrer qu'il existe un unique couple de polynômes  $P$  et  $Q$  de degrés strictement inférieurs à  $n$  tels que  $(1 - X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$ .
2. Démontrer que  $P(1 - X) = Q(X)$  et  $Q(1 - X) = P(X)$ .
3. Démontrer qu'il existe une constante  $a$  telle que

$$(1 - X)P'(X) - nP(X) = aX^{n-1}.$$

En déduire les coefficients de  $P$  et la valeur de  $a$ .

Réponse :  $a = -(2n - 1)C_{2n-2}^{n-1}$ .

**Exercice 393** Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , premiers entre eux, tels que  $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$ . En déduire que l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 394** 1. Montrer que les polynômes  $X - 1$  et  $X - 2$  sont premiers entre eux et en déduire  $d = \text{pgcd}((X - 1)^2, (X - 2)^3)$  et des  $U$  et  $V$  polynômes tels que

$$U(X - 1)^2 + V(X - 2)^3 = d.$$

2. Déterminer le polynôme  $P$ , de degré minimal, tel que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 1)^2$  est  $2X$  et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - 2)^3$  est  $3X$ .

**Exercice 395** Montrer que les polynômes complexes  $P = X^{1998} + X + 1$  et  $Q = X^5 + X + 1$  sont premiers entre eux.

### 7.3 Racines, décomposition en facteurs irréductibles

**Exercice 396** 1. Montrer que le polynôme  $P(X) = X^5 - X^2 + 1$  admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

2. Montrer que le polynôme  $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$  a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 397** Soit  $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$  un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les  $a_i$  soient  $-1$  et  $1$ ). Montrer que si  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux est une racine rationnelle de  $P$  alors  $p$  divise  $a_0$  et  $q$  divise  $a_n$ .

**Exercice 398** Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  un polynôme de degré  $n$ .

1. Montrer que si  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}$  alors il n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ .
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ , de multiplicité strictement plus grande que  $\frac{n}{2}$ . Montrer que  $\lambda$  est rationnel.

**Exercice 399** Montrer que le polynôme  $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$  admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme  $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$ .

**Exercice 400** Soit  $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

1. Vérifier que  $i$  est racine de  $P$ .
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $P$  sur  $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur  $\mathbb{C}[X]$  et sur  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles :  $P = X^4 + X^2 + 1$ ,  $Q = X^{2n} + 1$ ,  $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ ,  $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$  (on cherchera les racines doubles de  $S$ ).

**Exercice 401** Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$ , sans déterminer ses racines, le polynôme  $P = X^4 + 1$ , en produit de facteurs irréductibles.

[Exercice corrigé]

**Exercice 402** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , démontrer que  $X - a$  divise  $X^n - a^n$ .

**Exercice 403** Décomposer  $X^{12} - 1$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 404** Prouver que  $B$  divise  $A$ , où :

$$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p} \text{ et } B = X^2 + X + 1,$$

$$A = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1 \text{ et } B = X(X + 1)(2X + 1),$$

$$A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1 \text{ et } B = (X - 1)^2.$$

**Exercice 405** Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ; notons  $m = P(n)$ ; ( $\deg(P) \geq 1$ ).

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{Z}, m$  divise  $P(n + km)$ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme  $P$  dans  $\mathbb{Z}[X]$ , non constant, tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $P(n)$  soit premier.

**Exercice 406** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $P(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe  $S, T \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P = S^2 + T^2$  (on utilisera la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ ).

*Indications :*

1. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , déterminer  $c, d \in \mathbb{R}$  tels que :  $ab = c^2 - d^2$ , vérifier que  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$ .
2. Résoudre le problème pour  $P$  de degré 2.
3. Conclure.

**Exercice 407** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ; on suppose  $\sin n\theta \neq 0$ . Déterminer les racines du polynôme  $P = \sum_{k=1}^n C_n^k \sin k\theta X^k$ . Vérifier que ces racines sont toutes réelles.

**Exercice 408** Soit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $Q \in \mathbb{C}[X]$ , premiers entre eux. On suppose que  $a$  est racine double de  $P^2 + Q^2$ . Montrer que  $a$  est racine de  $P'^2 + Q'^2$ .

**Exercice 409** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 410** Pour quelles valeurs de  $a$  le polynôme  $(X+1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 411** Montrer que le polynôme  $X^3 + 2$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Factoriser ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 412** Dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ , décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1.  $X^3 - 3$ .
2.  $X^{12} - 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 413** Quelle est la décomposition de  $X^6 + 1$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  ? Dans  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 414** Soit  $P$  le polynôme  $X^4 + 2X^2 + 1$ . Déterminer les multiplicités des racines  $i$  et  $-i$ , de deux façons différentes : soit en décomposant  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , soit en utilisant le polynôme dérivé de  $P$ .

**Exercice 415** Soit le polynôme  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ .

1. Montrer que  $j$  est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de  $P$  ?
3. Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 416** Soit  $E$  le polynôme du troisième degré :  $aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ , et soit  $x_1, x_2, x_3$  ses trois racines dans  $\mathbb{C}$ . Trouver un polynôme ayant pour racines  $x_1x_2, x_2x_3$  et  $x_3x_1$ .

**Exercice 417** Soient  $x_1, x_2, x_3$  les racines de  $X^3 - 2X^2 + X + 3$ . Calculer  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ .

**Exercice 418** Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Montrer qu'il y a un nombre fini de polynômes unitaires de degré  $n$  à coefficients entiers ayant toutes leurs racines de module inférieur ou égal à 1.

**Exercice 419** Soit  $n \geq 2$  et  $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ .  $P_n$  a-t-il une racine double ?

**Exercice 420** Résoudre les équations :

1.  $P'P'' = 18P$  où  $P \in \mathbb{R}[X]$ .
2.  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$  où  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 421** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de  $P'$ .
2. Montrer que le polynôme  $P^2 + 1$  n'a que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 422** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$ .

1. Quel est le degré de  $P$  ?
2. Factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

3. Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N}^* \prod_{k=1}^p \cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$ .

**Exercice 423** Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  :

1.  $X^6 + 1$ .
2.  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ .

[Exercice corrigé]

## 7.4 Divers

**Exercice 424** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un polynôme  $P_n$  et un seul tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta.$$

Montrer que  $P_n$  est unitaire et que ses coefficients sont entiers. En déduire les  $r$  rationnels tels que  $\cos r\pi$  soit rationnel.

**Exercice 425** Déterminer, s'il en existe, tous les idéaux  $J$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que :  $I(P) \subset J \subset \mathbb{R}[X]$ , avec  $I(P)$  idéal engendré par  $P$  dans les cas suivants :

$$P = X^2 + X + 1, \quad P = X^2 + 2X + 1, \quad P = X^3 + 3X - 4.$$

**Exercice 426** Trouver un polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$  tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 427** Trouver un polynôme  $P$  de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 428** Trouver les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $\forall k \in \mathbb{Z} \int_k^{k+1} P(t)dt = k + 1$  (on pourra utiliser le polynôme  $Q(x) = \int_0^x P(t)dt$ ).

**Exercice 429** Soit  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  une famille de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  telle que  $\forall k \in \{0, \dots, n\} \deg P_k = k$ . Montrer à l'aide d'une récurrence soigneuse que cette famille est libre.

**Exercice 430** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et  $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$ .

1. Montrer que  $\Delta$  est linéaire, i.e. que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \Delta(aP + bQ) = a\Delta(P) + b\Delta(Q)$ .
2. Déterminer  $\ker(\Delta) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \Delta(P) = 0\}$ .
3. Soient  $H_0 = 1$  et pour  $k \in \{1, \dots, n\} H_k = \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$ . Calculer  $\Delta(H_k)$ .
4. Soit  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Comment trouver  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\Delta(P) = Q$ .
5. Déterminer  $P$  pour  $Q = X^2$  tel que  $P(1) = 0$ .
6. En déduire la somme  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

**Exercice 431** Résoudre l'équation d'inconnue  $P \in \mathbb{C}[X] : P(X+1)P(X) = -P(X^2)$ .



**Exercice 432** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$  tels que  $\exists(a, A) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall x \in ]-a, a[, |P(x) - Q(x)| \leq A|x^{n+1}|$ . Que dire de  $P$  et  $Q$  ?

**Exercice 433** Soient  $W_n = (X^2 - 1)^n, L_n = \frac{1}{2^n n!} W_n^{(n)}$ .

1. Donner le degré de  $L_n$ , son coefficient dominant, sa parité, calculer  $L_n(1)$ . Donner  $L_0, L_1, L_2$ .
2. Démontrer :  $\forall n \geq 1, (X^2 - 1)W_n' = 2nXW_n$ , en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)L_n'' + 2XL_n' - n(n+1)L_n = 0.$$

3. Montrer ensuite :  $\forall n \geq 1, L_n' = XL_{n-1}' + nL_{n-1}$ , puis  $nL_n = XL_n' - L_{n-1}'$ .
4. Montrer enfin que les polynômes  $L_n$  peuvent être définis par la récurrence :

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}.$$

**Exercice 434** Montrer que si  $n \geq 3$ , l'équation  $x^n + y^n = z^n$  n'a pas de solution non triviale (i.e.  $xyz \neq 0$ ) dans  $\mathbb{C}[X]$ .

*Indication* : on peut supposer  $x, y, z$ , sans facteurs communs. Dériver la relation, la multiplier par  $z$ , étudier le degré.

**Exercice 435** Soit  $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ , avec  $P(0) = 1, P(1) = 0$ , montrer :

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

*Indication* :  $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ , montrer  $\sum_{k=0}^n P(w_k) = (n+1)a_0$ .

**Exercice 436** 1. Lemme : Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant,  $z_0 \in \mathbb{C}$ , montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}, |P(z)| > |P(z_0)|.$$

*Indications* : Ecrire  $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$  où  $k$  est le plus petit entier strictement positif tel que  $P^{(k)}(z_0) \neq 0$ .

On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction  $z \rightarrow |P(z)|$  est atteint sur un disque centré en 0, mettons  $D(0, \mathbb{R})$ , et expliquer pourquoi :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

3. Montrer avec le lemme que  $P(z_0) = 0$ .

**Exercice 437** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$ . Quel est le degré de  $P$ ? Le factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 438** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme dont tous les zéros sont réels et distincts, montrer que  $\phi = (P')^2 - PP''$  n'a pas de zéro réel.

**Exercice 439** Soit  $K \subseteq \mathbb{C}$  un corps pour les lois usuelles sur  $\mathbb{C}$  et  $P \in K[X]$  non constant.

1. Montrer que si  $\alpha$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m \in [1, +\infty[$  alors  $\alpha$  est racine du polynôme  $P'$  avec la multiplicité  $m-1$ .

2. On suppose  $K = \mathbb{R}$  et  $P$  scindé sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  (on utilisera le théorème de Rolle).

**Exercice 440** Soient  $m, n \in [1, +\infty[$ ,  $d = \text{pgcd}(m, n)$  et  $P = X^m - 1, Q = X^n - 1, D = X^d - 1 \in \mathbb{C}[X]$ .

1. (a) Montrer que si  $x \in \mathbb{C}$  est racine commune de  $P$  et  $Q$  alors  $x$  est racine de  $D$  (on pourra utiliser l'égalité de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ ).
- (b) Montrer que si  $y \in \mathbb{C}$  est racine de  $D$  alors  $y$  est racine commune de  $P$  et  $Q$  (utiliser la définition de  $d$ ).
2. (a) Soient  $A, B \in \mathbb{C}[X]$  tels que toute racine de  $A$  est racine de  $B$ . Peut-on en déduire que  $A$  divise  $B$ ? Même question si les racines de  $A$  sont simples.
- (b) Montrer que les racines de  $D$  et  $P$  sont simples et en déduire que  $\text{pgcd}(P, Q) = D$ .

**Exercice 441** Soient les polynômes complexes  $P_1 = X^3 - 2, P_2 = X^4 + 4$  et  $P_3 = X^4 + 4X^3 + 8$ .

1. Étudier leur irréductibilité sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $P_1$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$  (on utilisera que  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ ).
3. Montrer que  $P_2$  est réductible sur  $\mathbb{Z}$ .
4. Montrer que  $P_3$  est irréductible sur  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 442** Soit  $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18 \in \mathbb{C}[X]$ . Déterminer toutes les racines complexes de  $P$  sachant que deux d'entre elles ont 6 pour produit.

## 8 Fractions rationnelles

**Exercice 443** Décomposer les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3 + 1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3}{X^3 - 1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X - 1)^2(X + 1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$F(X) = \frac{1}{(X^3 - 1)^2} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X)$$

$$\frac{X^7 + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{3X^5 + 2X^4 + X^2 + 3X + 2}{X^4 + 1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{X^{2n} + 1} \text{ sur } \mathbb{C} \text{ puis sur } \mathbb{R}$$

$$\frac{X^3 + X}{(X^2 + X + 1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

**Exercice 444** 1. Décomposer  $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

2. Décomposer  $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .

3. Décomposer  $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
4. Décomposer  $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
5. Décomposer  $\frac{X}{X^2-4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
6. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
7. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
8. Décomposer  $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
9. Décomposer  $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$ .
10. Décomposer  $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .
11. Décomposer  $\frac{X+i}{X^2+i}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .
12. Décomposer  $\frac{X}{(X+i)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .
13. Décomposer  $\frac{X^2+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
14. Décomposer  $\frac{X}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
15. Décomposer  $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
16. Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
17. Décomposer  $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
18. Décomposer  $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
19. Décomposer  $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .
20. Décomposer  $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 445** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 446** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 447** Décomposition en éléments simples  $\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 448** Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $F(X) = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$ . En utilisant la formule de Taylor en  $a$  pour  $f(X) = (X-a)^n F(X)$ , décomposer  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 449** Donner une CNS sur  $f \in \mathbb{C}(X)$  pour qu'il existe  $g \in \mathbb{C}(X)$  tel que  $f = g'$ .

**Exercice 450** On appelle valuation une application  $v : \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  telle que :  $\lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow v(\lambda) = 0, v(0) = \infty, \exists a \in \mathbb{C}(X) : v(a) = 1$

$$\forall (f, g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(fg) = v(f) + v(g)$$

$$\forall (f, g) \in \mathbb{C}(X)^2, v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$$

(avec les convention évidentes  $k + \infty = \infty, \forall k \geq 1 : k\infty = \infty, 0\infty = 0$ , etc.) Déterminer toutes les valuations de  $\mathbb{C}(X)$  et montrer la formule (la somme portant sur toutes les valuations) :

$$\forall f \in \mathbb{C}(X) - \{0\}, \sum_v v(f) = 0.$$

## Deuxième partie

# ANALYSE 1

## 9 Propriétés de $\mathbb{R}$

### 9.1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

**Exercice 451** 1. Démontrer que si  $r \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$  alors  $r + x \notin \mathbb{Q}$  et si  $r \neq 0$   $r.x \notin \mathbb{Q}$ .

2. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,

3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel  $a > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que  $n > a$ .)

[Exercice corrigé]

**Exercice 452** Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?

$a = 1/3$ ,  $b = 1/15$ ,  $c = 1/25$ ,  $d = 1/125$ ,  $e$ ,  $f = 0,333 \dots 3 \dots$ ,  $g = \sqrt{2}$ ,  
 $h = 0,123456789123456789123 \dots$ ,  $i = 0,1234567891011121314 \dots$ ,  $j = \pi$ ,  $k = 13/7$ ,  
 $l = 27/17$ .

**Exercice 453 (Un procédé géométrique d'approximation de  $\sqrt{2}$ )** Dans le plan  $xOy$ , on porte sur  $Ox$  une suite de points  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  et sur  $Oy$  une suite de points  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , construites de la manière suivante :

(i)  $a_1 = 2$  et  $b_1 = 1$ ,

(ii)  $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ ,

(iii)  $a_n b_n = 2$  (le rectangle de côtés  $a_n$  et  $b_n$  a pour aire 2).

1. Représentez cette suite de rectangles de côtés  $a_n$  et  $b_n$ .

2. Démontrez successivement que :  $\forall n, b_n < a_n$ ;  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante;  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante.

3. Calculez  $a_n - b_n$  en fonction de  $a_{n-1} - b_{n-1}$  et  $a_n$ . Montrez que l'on a l'inégalité :

$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}.$$

4. Calculez les premiers termes de la suite  $a_1, a_2, \dots, a_6$ . Combien de décimales exactes de  $\sqrt{2}$  obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grosso modo* à chaque pas.

**Exercice 454** Calculer avec une calculette :  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$  et  $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ . Expliquer le résultat.

**Exercice 455** On considère les nombres rationnels inférieurs à  $\sqrt{2}$ . Y a-t-il un nombre rationnel juste avant  $\sqrt{2}$ , plus grand que tous les nombres rationnels inférieurs à  $\sqrt{2}$  ?

Une suite de nombres rationnels a-t-elle pour limite un nombre rationnel ?

Une suite de nombres décimaux a-t-elle pour limite un nombre décimal ?

**Exercice 456** Soient  $a$  et  $b$  deux rationnels positifs tels que  $\sqrt{a}$  et  $\sqrt{b}$  soient irrationnels. Montrer que  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  est irrationnel.

**Exercice 457** Soit  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . On suppose que tous les  $a_i$  sont des entiers.

1. Montrer que si  $p$  a une racine rationnelle  $\frac{\alpha}{\beta}$  alors  $\alpha$  divise  $a_0$  et  $\beta$  divise  $a_n$ .

2. On considère le nombre  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ . En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

[Exercice corrigé]

**Exercice 458** Trouver sous la forme  $\frac{p}{q}$  des rationnels  $x$  dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$3,14\widehat{14} \dots$  ;  $0,99\widehat{9} \dots$  ;  $3,149\widehat{9} \dots$

**Exercice 459** 1. Soit  $N_n = 0,19971997\dots1997$  ( $n$  fois). Mettre  $N_n$  sous la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

2. Soit  $M = 0,199719971997\dots$ . Donner le rationnel dont l'écriture décimale est  $M$ .

3. Même question avec :  $P = 0,1111\dots + 0,2222\dots + 0,3333\dots + 0,4444\dots + 0,5555\dots + 0,6666\dots + 0,7777\dots + 0,8888\dots + 0,9999\dots$

[Exercice corrigé]

**Exercice 460** Montrer que l'ensemble  $\{r^3 ; r \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 461** Montrer que  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  est irrationnel.

[Exercice corrigé]

**Exercice 462** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , montrer :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

*Indication* : considérer les parties fractionnaires de  $0, a, 2a, \dots, qa$  et la partition  $[0, \frac{1}{q}[, [\frac{1}{q}, \frac{2}{q}[, \dots, [\frac{q-1}{q}, 1[$  de  $[0, 1[$ .

**Exercice 463** Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{a}{2^k}, (a, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans  $\mathbb{R}$ .

## 9.2 Maximum, minimum, borne supérieure...

**Exercice 464** Le maximum de 2 nombres  $x, y$  (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté  $\max(x, y)$ . De même on notera  $\min(x, y)$  le plus petit des 2 nombres  $x, y$ . Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour  $\max(x, y, z)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 465** Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de :  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  en posant  $u_n = 2^n$  si  $n$  est pair et  $u_n = 2^{-n}$  sinon.

[Exercice corrigé]

**Exercice 466** Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 467** Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

1. Montrer que  $I$  est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de  $I$ .

**Exercice 468** Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément, dans  $\mathbb{D}$ , dans  $\mathbb{Q}$ , dans  $\mathbb{R}$ , (si la question se pose) ?

1.  $[0, 3[$ ,
2.  $\{0\} \cup ]1, 2]$ ,
3.  $\mathbb{D} \cap [0, 1/3]$ ,
4.  $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = 1/n\}$ ,
5.  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ .

**Exercice 469** On considère l'ensemble des nombres de la forme  $1 + \frac{1}{n}$ , où  $n$  décrit l'ensemble des entiers strictement positifs. Cet ensemble est-il majoré ? Minoré ? A-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ? Justifier vos réponses.

**Exercice 470** Étant donné un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$ , écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de  $A$ ,
2.  $m$  est un minorant de  $A$ ,
3.  $P$  n'est pas un majorant de  $A$ ,
4.  $A$  est majoré,
5.  $A$  n'est pas minoré,
6.  $A$  est borné,
7.  $A$  n'est pas borné.

**Exercice 471** Soit  $E$  l'ensemble des réels de la forme  $\frac{n-1/n}{n+1/n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $E$  admet-il une borne inférieure, une borne supérieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

**Exercice 472** Soit  $E = \{\frac{1}{n} \cos n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  ; calculer  $\inf E$  et  $\sup E$ .

**Exercice 473** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x$  de  $A$  et tout  $y$  de  $B$  on ait  $x \leq y$ . Démontrer que  $\sup A$  et  $\inf B$  existent et que  $\sup A \leq \inf B$ .

**Exercice 474** Soit  $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i (\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j (\inf_i a_{ij}).$$

**Exercice 475** Soit  $A$  une partie majorée de  $\mathbb{R}$  d'au moins deux éléments et  $x$  un élément de  $A$ .

1. Montrer que si  $x < \sup A$ , alors  $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$ .
2. Montrer que si  $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$ , alors  $x = \sup A$ .

**Exercice 476** Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . On note  $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$ .

1. Montrer que  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A+B$ .
2. Montrer que  $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 477** Soit  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . **Vrai** ou **faux** ?

1.  $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ ,
2.  $B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ ,
3.  $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$ ,
4.  $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$ ,
5.  $\sup(-A) = -\inf A$ ,
6.  $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 478** Donner la borne supérieure et la borne inférieure (si elles existent) de l'ensemble :

$$D = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Cet ensemble admet-il un maximum, un minimum ?

**Exercice 479** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ,  $n$  nombres réels. Calculer :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^n |x - a_k|.$$

**Exercice 480** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ . Tracer les graphes des fonctions  $f$ ,  $|f|$ ,  $f_+$ ,  $f_-$  où :  $f_+ = \max(f, 0)$ ,  $f_- = \min(f, 0)$ .

**Exercice 481** Si  $a = \sup A$ , montrer qu'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ . Réciproque.

**Exercice 482** Soit  $A = \mathbb{Q} \cap ]0, 1[$  et  $a, b \in \mathbb{R}_+$ . On considère les applications suivantes de  $A$  dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$f: \frac{p}{q} \mapsto \frac{q-p}{q+p}; \quad g: \frac{p}{q} \mapsto \frac{aq+bp}{p+q}$$

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de  $f(A)$  et de  $g(A)$ .

**Exercice 483** Soit  $A$  l'ensemble des nombres réels qui peuvent s'écrire  $x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$  pour  $p$  et  $q$  entiers vérifiant  $0 < p < q$ .

1. Montrer que  $A$  est minorée par  $-3$  et majorée par  $2$ .
2. Déterminer  $\inf A$  et  $\sup A$  (pour la borne supérieure on pourra prendre  $q = p + 1$ ).

**Exercice 484** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée. On pose  $A_p = \sup_{n > p} u_n$  et  $B_p = \inf_{n > p} u_n$ . Montrer que  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante bornée et que  $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante bornée. Soit  $L = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p$  et  $l = \lim_{p \rightarrow \infty} B_p$ .

1. Dans le cas particulier où  $u_n = \frac{n+2}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$ , calculer  $L$  et  $l$ .
2. Montrer que :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n > l - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, u_n < l + \varepsilon \end{aligned}$$

3. Interpréter ces propriétés. Énoncer des propriétés analogues pour  $L$ . Démontrez-les.
4. Que peut-on dire de  $(u_n)$  si  $L = l$  ?

**Exercice 485** Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \quad g = \sqrt{xy} \quad h = \frac{2xy}{x+y} \quad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

Montrer que  $a, g, h, q$  sont rangés dans un ordre indépendant de  $x$  et  $y$ .

**Exercice 486** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides bornées de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $A \cup B$  est bornée et que  $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$ .
2. Énoncer un résultat analogue pour  $\inf(A \cup B)$ .
3. Qu'en est-il pour  $A \cap B$  ?

### 9.3 Divers

**Exercice 487** Démontrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n \geq 2$  l'implication

$$[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx]$$

est vraie.

**Exercice 488** Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ , les  $a_i$  n'étant pas tous nuls. Soit  $p(x) = \sum_{i=1}^n (a_i + xb_i)^2$ . Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est  $\leq 0$ . En déduire que :

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2},$$

et que

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

**Exercice 489** Deux entiers naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation  $a^b = b^a$  ?

**Exercice 490** Résoudre l'équation  $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ ,  $x$  étant un réel positif.

**Exercice 491** Si  $a$  et  $b$  sont des réels  $\geq 0$ , montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{a+b}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 492** Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Montrer que dans les deux cas on a :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Exercice 493** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on note  $E(x)$  sa partie entière et  $\{x\}$  sa partie décimale.

1. Tracer les graphes des fonctions  $x \mapsto E(x)$  et  $x \mapsto \{x\}$ .
2. Montrer les relations suivantes :  $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$ ,  $E(x+n) = E(x) + n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Déterminer  $\lim E(x)$  et  $\lim \{x\}$  lorsque  $x \rightarrow -1_+$  et  $x \rightarrow -1_-$ . Ces fonctions ont-elles une limite lorsque  $x \rightarrow -1$  ?



**Exercice 494** Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$  montrer que :

$$2xy \leq \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2.$$

**Exercice 495** Soit deux nombres réels  $a$  et  $b$  vérifiant :  $-1 < a < 4$  et  $-3 < b < -1$ . Donner un encadrement de  $a - b$  et de  $a/b$ .

**Exercice 496** On note  $E(x)$  la partie entière d'un réel  $x$ .

1. Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$ .
2. Calculer  $E(x) + E(-x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$   $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ .

**Exercice 497** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$   $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . Montrer que

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$   $f(n) = nf(1)$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{Z}$   $f(n) = nf(1)$ .
3.  $\forall q \in \mathbb{Q}$   $f(q) = qf(1)$ .
4.  $\forall x \in \mathbb{R}$   $f(x) = xf(1)$  (on pourra utiliser la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  pour encadrer  $x$  par des rationnels de plus en plus proches de  $x$ ).

[Exercice corrigé]

**Exercice 498** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = n$ . Montrer que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 1.$$

**Exercice 499** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ , montrer que :

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Exercice 500** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$A \neq \emptyset,$$

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon_x > 0, ]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[ \subset A,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A.$$

Montrer que  $A = \mathbb{R}$ .

**Exercice 501** Montrer :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

**Exercice 502** Soient  $A$  et  $B$  deux parties denses de  $\mathbb{R}$ ,  $AB$  et  $A + B$  sont-elles denses ? Étude de la réciproque.

**Exercice 503** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$$

## 10 Suites

### 10.1 Découverte

**Exercice 504** 1. Dessiner les suites suivantes :

(a)  $u_n = \frac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$  (prendre 2 cm comme unité sur  $Oy$ )

(b)  $u_n = (-1)^n$

(c)  $u_n = \frac{1}{n} \cos n$      $v_n = \frac{1}{n} |\cos n|$     ( $n$  en radians)

(d)  $u_n = \cos n$

(e)  $u_1 = 1$  ;  $u_2 = 2$  ;  $u_3 = 3$  ;  $u_4 = -1$  ;  $u_n = 2$  pour  $n \geq 5$ .

(f)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$  (prendre 10 cm comme unité sur  $Oy$ )

(g)  $u_n = \cos \frac{n\pi}{6}$

(h)  $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$  (prendre 1 cm comme unité sur  $Oy$ )

(i)  $u_n = n^2 + 1$

(j)  $u_n = \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$  (pour  $n \geq 2$ )

2. Classifier les dessins par paquets en précisant vos critères.

3. Pour chaque suite, pouvez-vous trouver  $l$  et  $n$  tels que  $|u_n - l| < \frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{100}$  ? Mettre en relation avec le classement précédent.

4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

- (a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
- (b) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

### 10.2 Convergence

**Exercice 505** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}$ . Que pensez-vous des propositions suivantes :

- Si  $(u_n)_n$  converge vers un réel  $l$  alors  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  convergent vers  $l$ .
- Si  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont convergentes, il en est de même de  $(u_n)_n$ .
- Si  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont convergentes, de même limite  $l$ , il en est de même de  $(u_n)_n$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 506** Montrer que toute suite convergente est bornée.

[Exercice corrigé]

**Exercice 507** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

[Exercice corrigé]

**Exercice 508** Étudier la suite  $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ ,  $a$  et  $b$  étant donnés dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 509** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers  $+\infty$ .
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

**Exercice 510** Soit  $l$  un nombre réel. Peut-on dire qu'une suite qui vérifie

$$\forall \varepsilon \in ]0, 1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$$

converge vers  $l$  ?

**Exercice 511** Construire une suite  $u_n = v_n w_n$  (resp.  $v_n + w_n$ ) convergente et telle que l'une au moins des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  diverge.

**Exercice 512** Vrai ou faux : il existe une suite  $(u_n)$  telle que  $(u_{n+1} - u_n)$  tend vers 0 et qui diverge.

**Exercice 513** Encadrer la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$ . Que peut-on en déduire ?

**Exercice 514** 1. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0$  ?

2. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$  ?

3. Que peut-on dire d'une suite qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = +\infty$  ?

**Exercice 515** Étant donné  $k \in \mathbb{R}_+$ , que peut-on dire d'une suite  $(u_n)$  qui vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$  ? *Application* : Étudier  $u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}$ .

**Exercice 516** Montrer qu'une partie  $D$  est dense dans  $\mathbb{R}$  ssi tout réel est limite d'une suite de points de  $D$ .

**Exercice 517** Soit  $A$  une partie bornée de  $\mathbb{R}$  et  $x$  un réel.

1. Montrer que  $x = \sup(A)$  ssi ( $x$  majore  $A$  et il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  qui converge vers  $x$ ).
2. Énoncer un résultat analogue pour  $\inf(A)$ .

**Exercice 518** Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n} \quad \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1} \quad \frac{1}{n} + (-1)^n \quad n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2 + k} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 519** Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

[Exercice corrigé]

**Exercice 520** Soit  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

1. En utilisant une intégrale, montrer que  $\forall n > 0 \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ .
2. En déduire que  $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ .
3. Déterminer la limite de  $H_n$ .
4. Montrer que  $u_n = H_n - \ln(n)$  est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 521** Montrer qu'une suite monotone dont une suite extraite converge est convergente.

**Exercice 522** Montrer que  $(u_n)$  converge ssi  $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$  convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

**Exercice 523** Étudier la convergence de la suite  $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ .

**Exercice 524** Soit  $q$  un entier au moins égal à 2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$ .

1. montrer que  $u_{n+q} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
2. Calculer  $u_{nq}$  et  $u_{nq+1}$ . En déduire que la suite  $u_n$  n'a pas de limite.

[Exercice corrigé]

**Exercice 525** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle prenant toute les valeurs rationnelles. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite.

**Exercice 526** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^2 = \lambda$ . Que dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 527** 1. Donner un exemple de suite bornée divergente, puis de suite divergente telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} - x_n = 0.$$

2. Donner un exemple de suite divergente qui a une seule valeur d'adhérence (i.e. telle qu'il existe une seule extraction  $\phi$  telle que  $x_{\phi(n)}$  converge).
3. Donner un exemple de suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergente telle que  $\forall k \geq 2, (x_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 528** Que peut-on dire des nombres réels  $a$  et  $b$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a - \frac{1}{n} \leq b \leq a + \frac{1}{n} ?$$

**Exercice 529** Étudier la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est premier} \\ 67 + 1/n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si cette suite converge, montrer que sa limite est inférieure à 72. Étudier la convergence de cette suite.

**Exercice 530** On donne la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_1 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}.$$

En étudiant les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 531** 1. Soit  $(u_n), (v_n), (w_n)$  trois suites telles que pour  $n$  assez grand on ait  $v_n \leq u_n \leq w_n$ . On suppose que  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont convergentes, et on note  $v = \lim v_n$  et  $w = \lim w_n$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon$  positif, on a  $v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon$  pour  $n$  assez grand (*théorème d'encadrement*). Que peut-on en déduire si  $v = w$  ?

2. Soit  $(u_n)$  une suite convergente de limite  $l$ . Montrer que la suite

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

est convergente et a pour limite  $l$ . Pour cela, encadrer  $u_n$  à  $\varepsilon$  près pour  $n$  assez grand, et en déduire un encadrement de  $v_n$ .

**Exercice 532** Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel positif et  $(p_n)$  et  $(q_n)$  deux suites d'éléments de  $\mathbb{N}^*$  telles que  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty.$$

**Exercice 533** Étudier la suite  $u_n = \ln(1 + \ln(2 + \ln(3 + \cdots + \ln(n - 1 + \ln n) \cdots)))$ .

**Exercice 534** Montrer que pour  $n \geq 1$ , l'équation  $x^n + x^{n-1} + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0$  admet une unique racine positive; on la note  $u_n$ . Étudier la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 535** Un ivrogne part à un instant donné d'un point donné. À chaque seconde, il fait un pas dans une direction inconnue (et qui peut changer de façon arbitraire à chaque pas). Comme il se fatigue, ses pas sont de plus en plus courts. Peut-on prévoir qu'au bout d'un certain temps il restera à moins d'un mètre d'une certaine position si on admet que la longueur de son  $n$ -ième pas est :

1.  $1/n$  mètre ?
2.  $1/n^2$  mètre ?

### 10.3 Suites définies par une relation de récurrence

**Exercice 536** Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par récurrence en posant  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$  si  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  est croissante et majorée.
2. Montrer que  $(u_n)$  converge vers le nombre réel positif  $l$  qui vérifie  $l^2 - l - 1 = 0$  et calculer  $l$ .

**Exercice 537** Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 4) \quad \forall n \geq 0.$$

**Exercice 538** Étudier les suites :

1.  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ .
2.  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

**Exercice 539 (Examen 2000)** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  en posant  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que l'équation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  possède une solution unique  $\alpha \in ]0, 1/2[$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  est équivalente à l'équation  $x^3 - 3x + 1 = 0$  et en déduire que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $f(x) = x$  dans l'intervalle  $[0, 1/2]$ .
3. Montrer que  $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$  et que la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . En déduire que la suite  $(x_n)$  est croissante.
4. Montrer que  $f(1/2) < 1/2$  et en déduire que  $0 \leq x_n < 1/2$  pour tout  $n \geq 0$ .
5. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $\alpha$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 540** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$  pour  $n \geq 0$ .

1. Étudier cette suite si  $a = 0$ .
2. Étudier cette suite si  $a = -10$ .
3. Étudier cette suite si  $a = 3$ .
4. Généraliser en discutant selon la valeur de  $a$ .

**Exercice 541** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{10}$  dans les cas suivants :

1.  $u_0 = -4$ .
2.  $u_0 = -2$ .
3.  $u_0 = 2$ .
4.  $u_0 = 3$ .

**Exercice 542** Étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{(u_n - 3)^2}{4}$ .

**Exercice 543** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = e^{-u_n}$  et  $u_0 = 0$ .

**Exercice 544** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = \cos u_n$  et  $u_0 = -8$ .

**Exercice 545** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = \frac{2u_n^3 + 7}{3(u_n^2 + 1)}$  et  $u_0 = 2$ . En déduire une valeur approchée à  $10^{-8}$  près de la racine réelle du polynôme  $X^3 + 3X - 7$ .

**Exercice 546** Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{-u_n^2 - u_n + 24}{6}$  pour  $n \geq 0$ .

**Exercice 547** Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = -\frac{3}{13}u_n^2 - \frac{1}{9}u_n + 3$  pour  $n \geq 0$ .

**Exercice 548** Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = -\frac{1}{5}u_n^2 - \frac{1}{6}u_n + \frac{33}{10}$  pour  $n \geq 0$ .

**Exercice 549** Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)$ .

**Exercice 550** Discuter suivant les valeurs de  $u_0$  la nature de la suite  $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$ .

**Exercice 551** Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs ; on définit une suite  $(u_n)$  par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{au_n + b}$$

1. Montrer qu'il existe une valeur de  $u_0$  pour laquelle cette suite est stationnaire.
2. Montrer que si  $u_0$  est distinct de cette valeur,  $(u_n)$  est monotone et bornée. Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Exercice 552** Étudier suivant les valeurs données à  $u_0$  appartenant à  $\mathbb{C}$  les suites :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{u_n + 4} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \\ u_{n+1} &= \frac{-1}{u_n + 1} \end{aligned}$$

**Exercice 553** Soit  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . On considère  $a \in [0, 1]$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $u_0 = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ . Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)$  est croissante.
2. Si  $(u_n)$  est croissante, alors  $f$  est croissante.

3. Si  $(u_n)$  est croissante et  $f$  monotone, alors  $f$  est croissante.
4. Si  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$ , alors  $l$  est point fixe de  $f$ .
5. Si  $f$  est dérivable, alors  $(u_n)$  est bornée.
6. Si le graphe de  $f$  est au dessus de la droite d'équation  $y = x$ , alors  $(u_n)$  est croissante.
7. Si  $(u_n)$  converge vers un point fixe  $l$  de  $f$ , alors  $f$  est continue en  $l$ .

**Exercice 554** Étudier la suite définie par  $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$  (discuter suivant les valeurs de  $u_0$ ).

**Exercice 555** Soit  $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$  et  $a \in [0, 1]$ . Étudier la suite définie par  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Exercice 556** Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n + E(u_n))$  où  $E$  désigne la fonction « partie entière ».

**Exercice 557** 1. Étudier la suite définie par récurrence par  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = \cos u_n$ , où  $a$  est un nombre réel donné.

2. Étudier la suite définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = \underbrace{\cos(\cos(\cos(\dots(\cos n)\dots)))}_{n \text{ fois } \cos}$ .

**Exercice 558** 1. Étudier dans  $\mathbb{C}$  une suite  $(u_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = u_n^2$ . Discuter suivant  $u_0$ .

2. On considère dans  $\mathbb{C}$  une suite  $(v_n)$  telle que  $\forall n$ ,  $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \frac{A}{v_n})$  où  $A$  est un nombre complexe non nul donné. Étudier l'existence et la convergence de cette suite suivant les valeurs de  $v_0$ . On pourra noter  $a$  une des racines carrées de  $A$  et poser  $w_n = \frac{v_n - a}{v_n + a}$ .

**Exercice 559** 1. On donne  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ,  $u_0 \geq 0$ ; étudier la suite définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = \frac{A}{n+1} + Bu_n$ .

2. Étudier la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{4n}{n+1} - \frac{u_n}{2 + u_n}$  (on pourra utiliser la question précédente pour terminer).

**Exercice 560** On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}.$$

1. Montrer que  $x_n$  est supérieur ou égal à 1 pour tout  $n$ .
2. Montrer que si  $(x_n)$  converge, sa limite  $l$  vérifie

$$l = \sqrt{2l + 1}.$$

3.  $l$  étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver  $k \in ]0, 1[$  tel que

$$|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|.$$

Si oui en déduire que  $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$ . Conclure.

**Exercice 561** En utilisant les méthodes de l'exercice précédent, étudier les suites définies par :

$$y_0 = 3; \quad y_{n+1} = \frac{4 + 3y_n}{3 + 2y_n},$$

$$z_0 = 1; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}.$$

**Exercice 562** Soit une suite qui vérifie une relation de récurrence

$$u_n = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d} \quad (1)$$

1. Montrer que si la transformation homographique :  $x \mapsto y = \frac{ax+b}{cx+d}$  a deux points fixes distincts,  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut écrire la relation (1) sous la forme :  $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$ . Calculer  $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$  en fonction de  $\frac{u_1 - \alpha}{u_1 - \beta}$ .
2. Montrer que si la transformation homographique a un seul point fixe  $\gamma$ , on peut mettre la relation (1) sous la forme :  $\frac{1}{u_n - \gamma} = \frac{1}{u_{n-1} - \gamma} + k$ . Calculer  $\frac{1}{u_n - \gamma}$  en fonction de  $u_1$ .
3. Utiliser la méthode précédente pour étudier les suites  $(u_n)$  définies par :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3}, & \text{b) } u_{n+1} = \frac{-3u_n - 1}{u_n - 3}, \\ \text{c) } u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}, & \text{d) } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}. \end{array}$$

Discuter suivant les valeurs de  $u_1$  ; préciser pour quelles valeurs de  $u_1$  chaque suite est définie.

## 10.4 Limites

**Exercice 563** Posons  $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$  et pour tout entier  $n \geq 3$ ,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer  $u_n$ . En déduire que l'on a  $\lim u_n = \frac{1}{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 564** Calculer, lorsqu'elles convergent, les limites des suites définies par :

$$u_n = n - \sqrt{n^2 - n} \quad u_n = \sqrt{n(n+a)} - n \quad u_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad u_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}.$$

**Exercice 565** Montrer que les suites définies pour  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \frac{n+1}{n} \quad u_n = \frac{n}{n+1} \quad u_n = \frac{1}{n^2+1} \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}$$

admettent toutes des limites que l'on calculera.

**Exercice 566** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie en posant  $u_0 = 0$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 567** Étudier la limite des suites suivantes :  $a_n = \cos\left(\frac{2^n}{n!}\right)$  ;  $b_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$  ;  $c_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$  ;  $d_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$  ;  $e_n = (\cos n) \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 568** Déterminer les limites lorsque  $n$  tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1.  $1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \dots ; \frac{(-1)^{n-1}}{n} ; \dots$
2.  $2/1 ; 4/3 ; 6/5 ; \dots ; 2n/(2n-1) ; \dots$
3.  $0,23 ; 0,233 ; \dots ; 0,233 \cdots 3 ; \dots$



4.  $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$

5.  $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$

6.  $\left[ \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$

7.  $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

8.  $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

9.  $(1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n)$  puis  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ ; ...

10.  $\left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$

11.  $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

12.  $\frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$

13. Démontrer la formule  $1+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ; en déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$ .

**[Exercice corrigé]**

**Exercice 569 (Méthode d'Héron)** Soit  $a > 0$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par  $u_0$  un réel vérifiant  $u_0 > 0$  et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

On se propose de montrer que  $(u_n)$  tend vers  $\sqrt{a}$ .

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que si  $n \geq 1$  alors  $u_n \geq \sqrt{a}$  puis que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

3. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{a}$ .

4. En utilisant la relation  $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$  donner une majoration de  $u_{n+1} - \sqrt{a}$  en fonction de  $u_n - \sqrt{a}$ .

5. Si  $u_1 - \sqrt{a} \leq k$  et pour  $n \geq 1$  montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left( \frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer  $\sqrt{10}$  avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant  $u_0 = 3$ .

**[Exercice corrigé]**

**Exercice 570** On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}; \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 571** Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ . On considère la fonction  $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ , supposée continue et monotone, et une suite récurrente  $(u_n)_n$  définie par :

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que  $f$  est croissante. Montrer que  $(u_n)_n$  est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation  $f(x) = x$ .
2. Application :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose que  $f$  est décroissante. Montrer que les suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  sont monotones et convergentes.
4. Application :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 572** 1. Soient  $a, b > 0$ . Montrer que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

2. Montrer les inégalités suivantes ( $b \geq a > 0$ ) :

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient  $u_0$  et  $v_0$  des réels strictement positifs avec  $u_0 < v_0$ . On définit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Montrer que  $u_n \leq v_n$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite décroissante.
- (c) Montrer que  $(u_n)$  est croissante. En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et quelles ont même limite.

[Exercice corrigé]

**Exercice 573** Soit  $x$  un réel.

1. Déterminer la limite de  $u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}$ .
2. En déduire que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 574** Soit  $n \geq 1$ .

1. Montrer que l'équation  $\sum_{k=1}^n x^k = 1$  admet une unique solution  $a_n$  dans  $[0, 1]$ .
2. Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante minorée par  $\frac{1}{2}$ .

3. Montrer que  $(a_n)$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 575** Calculer suivant les valeurs de  $x$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} [\cos(n! \pi x)]^{2m} \right].$$

**Exercice 576** Soient  $a_0$  et  $b_0$  deux réels fixés. On définit par récurrence les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$ .

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant  $a_n + b_n$ , montrer qu'elles convergent vers  $\frac{a_0 + b_0}{2}$ .

**Exercice 577** Soit  $(u_n)$  une suite qui tend vers 0. On pose  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ . Montrer que  $(x_n)$  converge vers 0 (on pourra fixer  $\varepsilon$  puis séparer la somme en deux et enfin choisir  $N \dots$ ).

**Exercice 578** Déterminer les limites de  $\frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$  et  $\sqrt[n]{n^2}$ .

**Exercice 579** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0.$$

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Exercice 580** Étudier la suite définie par récurrence :

$$u_0 = a > 0, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

**Exercice 581** Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

**Exercice 582** Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}.$$

**Exercice 583** Soit  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijective, telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)}{n} = \ell$ . Calculer  $\ell$ .

**Exercice 584** Soit  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injective ; montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = +\infty$ .

**Exercice 585** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée. On pose  $v_n = u_{n+1} - u_n$  et  $w_n = v_{n+1} - v_n$ , et on suppose que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ , puis que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ .

**Exercice 586** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers  $\ell$  et  $\phi$  une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$ . (pas nécessairement strictement croissante !). Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\phi(n)} = \ell$ .

**Exercice 587** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Exercice 588** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} - u_n = 0.$$

Montrer que

$$E = \{u_n - v_m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$$

est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 589** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1.$$

**Exercice 590** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergent respectivement vers  $\ell$  et  $L$ . Étudier la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

**Exercice 591** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( u_n + \frac{u_{2n}}{2} \right) = 1.$$

Que dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 592** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Étudier la suite définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = f(z_n).$$

*Indication* : on écrira  $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$ , où  $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-\pi, \pi[$  et on utilisera :

$$\sin \phi = 2^n \sin \frac{\phi}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{\phi}{2^i}.$$

## 10.5 Équivalents

**Exercice 593** Que penser-vous de l'énoncé suivant : si  $(u_n) \sim (v_n)$  alors  $(e^{u_n}) \sim (e^{v_n})$ . Donner un énoncé correct.

**Exercice 594** 1. Montrer que si  $\forall n \in \mathbb{N} u_n \neq 0$  et si  $(u_n) \rightarrow 0$  alors  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ .

2. Soit  $a$  un réel. Déterminer la limite de  $(1 + \frac{a}{n})^n$ .

**Exercice 595** Comparer les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \quad b_n = n^{\ln(n)}, \quad c_n = e^{n^2}, \quad d_n = (\ln n)^{n \ln n}$$

**Exercice 596** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles de limite  $+\infty$  telles que  $u_n = o(v_n)$ . Montrer qu'il existe une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $+\infty$  telle que  $u_n = o(w_n)$  et  $w_n = o(v_n)$ .

**Exercice 597** Donner un exemple de suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_n = O(v_n)$  mais qu'on n'ait ni  $u_n = o(v_n)$ , ni  $v_n = O(u_n)$ .

**Exercice 598** Étude de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 \in [0, 1], u_{n+1} = u_n^2.$$

Donner un équivalent de  $u_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 599** Montrer la réciproque du théorème de Césaro (i.e.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ) :

1. dans le cas où  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$  et

$$u_{n+1} - u_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

2. dans le cas où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**Exercice 600** Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$ . En utilisant  $v_n = \frac{u_n^2}{4}$ , donner un équivalent de  $u_n$ . *Indication* : on montrera que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} - v_n = 1$ , on en déduira un équivalent de  $v_n$  puis de  $u_n$ .

**Exercice 601** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ . L'étudier et, en utilisant  $v_n = \frac{1}{u_n}$ , en donner un équivalent dans le cas  $u_0 \in ]-1; 0]$ . Que dire dans le cas  $u_0 \in ]0; \infty[$ ? (On étudiera  $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ .)

**Exercice 602** Soient  $f$  et  $g$  deux formes linéaires sur un espace vectoriel  $E$  telles que  $fg = 0$ . Montrer que  $f = 0$  ou  $g = 0$ . Étudier la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$ . En étudiant  $y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ , en donner un équivalent.

**Exercice 603** Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[ , u_{n+1} = \sin u_n.$$

Donner  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ , (réponse :  $\frac{1}{3}$ ) en déduire un équivalent de  $u_n^{-2}$  donc de  $u_n$ .

**Exercice 604** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n \in [n, n+1[$  solution de  $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$ . Donner un équivalent de  $x_n$  puis faire un développement asymptotique de  $x_n - n$  à l'ordre 5 en fonction de  $\frac{1}{n}$ .

**Exercice 605** Étudier la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n^2}.$$

On montrera préalablement que :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

## 11 Limites de fonctions

### 11.1 Théorie

**Exercice 606** Écrire les définitions des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, x_0 \in \mathbb{R}$ .

(On précisera sur quel type d'intervalle la fonction  $f$  doit être définie.)

**Exercice 607** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $x_0$  dans son intérieur. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u > 0$ . Démontrer qu'il existe  $t > 0$  tel que si  $0 < |x - x_0| < t$  alors  $|f(x)| \geq \frac{u}{2}$ .

**Exercice 608** Montrer que si une fonction  $f$  définie sur  $E \subset \mathbb{R}$  est continue en  $x_0$  alors la fonction  $|f|$  est, elle aussi, continue en  $x_0$ . Montrer que la réciproque est fautive.

**Exercice 609** 1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$ .

2. Soient  $m, n$  des entiers positifs. Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ .

3. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 610** Soit  $f$  une fonction de variable réelle telle que  $\frac{f(x)}{|x|} \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ . Montrer que pour tout réel  $\alpha$  il existe  $X_\alpha$  tel que  $f(x) - |\alpha x| \geq |x|$  si  $|x| \geq X_\alpha$ . En déduire que pour tout  $\alpha$  réel  $f(x) - \alpha x \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 611** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0.$$

1. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

2. Montrer que si  $L > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

**Exercice 612**

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en  $+\infty$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 613** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles définies sur  $\dot{I} := I - \{x_0\}$ . Montrer que si  $f$  admet une limite à droite et une limite à gauche en  $x_0$  et que de plus ces deux limites coïncident, alors  $f$  admet une limite en  $x_0$  dont la valeur est la valeur commune des limites à droite et à gauche.

**Exercice 614** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients réels de degré respectif  $d$  et  $d'$ . Etudier suivant les valeurs de  $d$  et  $d'$ , et éventuellement de certains des coefficients de  $P$  et  $Q$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)/Q(x).$$

**Exercice 615** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$ . Montrer que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . (on pourra utiliser des  $\varepsilon$ , sommer des inégalités et utiliser la monotonie de  $f$  pour montrer qu'elle est bornée sur un segment).

Comment généraliser ce résultat ?

## 11.2 Calculs

**Exercice 616** Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2|x|}{x} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \\ d) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1} \end{array}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 617** 1. Montrer que pour tout  $0 < \varepsilon < 1$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x^2+x-2| < \varepsilon.$$

2. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2+x-1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x-2) \cos x.$$

**Exercice 618** 1. Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}^{+*}$ , et pour tout couple de nombres réels  $(x, y)$  appartenant à  $] -\infty, -a]$  ou à  $[a, \infty[$ , on a :

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{a^2} |x-y|.$$

2. En déduire que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

3. En déduire que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 619** 1. Pour tout  $n$  entier naturel et tout couple de réels  $(x, y)$ , établir la formule :

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

2. Dédurre de la question précédente que pour tout entier  $n$  tout réel strictement positif  $a$  et tout couple de réels  $(x, y)$  tel que  $|x| \leq a$  et  $|y| \leq a$ ,

$$|x^n - y^n| \leq na^{n-1}|x - y|.$$

3. Dédurre de ce qui précède que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$

Conclure.

4. Sur quel sous ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$ , la fonction de la variable réelle  $f$  donnée par

$$f(x) := \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .

**Exercice 620** 1. Rappeler que pour tout nombre réels  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $n$  tel que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{(2n+1)\pi} < \varepsilon.$$

2. Montrer que pour tout nombre réel  $l$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  tel que :

$$|\sin \frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  n'a pas de limite lorsque  $x$  tend vers 0.  
4. Montrer que la fonction définie par  $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 621** Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x) \end{array}$$

**Exercice 622** On rappelle les limites :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .  
Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{x^2} \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})} \end{array}$$

**Exercice 623** Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.



1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8.  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

[Exercice corrigé]

**Exercice 624** Soient  $a, b$  des réels positifs.  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

**Exercice 625** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m-a^m}{x^p-a^p} \quad (a > 0, m, p \in \mathbb{N}^*); \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h} \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x}-1} \right); \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4x + \pi}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+x}}.$$

**Exercice 626** En utilisant la définition d'une limite, montrer que :

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} (3x+2) \sin\left(\frac{1}{3x+2}\right) = 0; \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 2.$$

**Exercice 627** Calculer les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right); \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right); \quad c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}; \quad e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}).$$

**Exercice 628** Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 629** Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{4x^4 + x^2 + x - 6} \quad \text{en } 1$$

$$\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{\tan x}{\sqrt{x^2 + 4} + x - 2} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1} \quad \text{en } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\tan(x + \frac{\pi}{4}) - 1}{\sqrt{3} - 2 \cos(x + \frac{\pi}{6})} \quad \text{en } 0$$

**Exercice 630** Étudier les asymptotes de  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$ .

**Exercice 631** Montrer que

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha x^{\alpha/2}} \quad \text{où } \alpha > 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

**Exercice 632** Calculer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^6 - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} \quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad a, b > 0 \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} + \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}.$$

**Exercice 633** Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-x})^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

**Exercice 634** Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{(\sinh x)^2} \right).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 635** Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 636** Trouver :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 637** Trouver pour  $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 638** Trouver pour  $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Exercice corrigé]

## 12 Continuité et étude de fonctions

### 12.1 Continuité : théorie

**Exercice 639 (Partiel Novembre 96)** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

1. Soit  $a \in I$ . Donner une raison pour laquelle :

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right) \Rightarrow \left( \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)| \right).$$

2. On suppose que  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ . En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation  $\text{Sup}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ , et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction  $\text{Sup}(f, g)$  est continue sur  $I$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 640** Soit  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  telle que pour tout  $x$  et  $x'$  ( $x \neq x'$ ) de  $[a, b]$  on ait :  $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une et une seule solution dans  $[a, b]$ . (On pourra introduire la fonction :  $x \mapsto g(x) = f(x) - x$ ).

**Exercice 641** 1. Soit  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$  telle que  $f(]a, b[) \subset [a, b]$ . Montrer, par considération de  $\phi(x) = f(x) - x$ , qu'il existe  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .

2. Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer qu'il existe  $c$  dans  $[0, \frac{1}{2}]$  tel que  $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ .
3. Un mobile parcourt, à vitesse continue, une distance  $d$  en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance  $\frac{d}{2}$ .

**Exercice 642** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(a) = f(b)$ . Montrer que la fonction  $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$  s'annule en au moins un point de  $[a, \frac{a+b}{2}]$ .

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

[Exercice corrigé]

**Exercice 643** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ . Montrer que  $f$  s'annule. Appliquer ceci aux polynômes de degré impair.

[Exercice corrigé]

**Exercice 644** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue telle que  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que si  $|x| > a$  alors  $f(x) \leq \frac{1}{2}$ .
2. Montrer que  $f$  est bornée et possède un maximum.

**Exercice 645** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 646** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 647** Soient  $f$  et  $g$  continues sur  $[0, 1]$  telles que  $\forall x \in [0, 1] f(x) < g(x)$ . Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que  $\forall x \in [0, 1] f(x) + m < g(x)$ .

**Exercice 648** Soit  $f$  croissante sur  $[a, b]$  et prenant toute valeur entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 649** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 650** Soit  $f$  périodique croissante. Que dire de  $f$  ?

**Exercice 651** Donner un exemple de fonction continue sur  $[0, 1]$  non lipschitzienne, puis de fonction continue en un seul point, puis de fonction discontinue sur les rationnels et continue sur les irrationnels, enfin de fonction continue telle que  $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ou si  $x = 0$ , et  $f(x) \in \mathbb{Q}$  si  $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Une fonction telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? Donner un exemple de bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$  discontinue en tout point.

**Exercice 652** Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  admettant 1 et  $\sqrt{2}$  pour périodes. Que dire de  $f$  ?

**Exercice 653** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  croissante, montrer qu'elle a un point fixe. *Indication* : étudier

$$E = \{x \in [0, 1] \mid \forall t \in [0, x], f(t) > t\}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 654** Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  croissante telle que  $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$  soit décroissante ; montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Exercice 655** Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x)e^{f(x)} = x.$$

Donner les variations de  $f$  puis comparer  $f$  et  $\ln$  au voisinage de  $+\infty$ .

**Exercice 656** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  croissante. Construire  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f \leq g$ .

**Exercice 657** Donner un exemple d'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

On suppose  $f$  continue en 0 et en 1, montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 658** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0, 1], f(a_n) = a_n^n.$$

On suppose  $f$  strictement décroissante. Montrer que  $a_n$  est unique et étudier la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 659** Existe-t-il une bijection continue de  $[0, 1[$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 660** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue telle que  $f^2 = f(*)$ . On note  $E_f = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$ . Montrer que  $E_f \neq \emptyset$  puis que c'est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Trouver toutes les solutions de (\*).

[Exercice corrigé]

**Exercice 661** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, évaluer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

**Exercice 662** Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 663** Soit  $f$  uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall x \geq 0$ , la suite  $(f(xn))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Montrer  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Exercice 664** Soit  $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  admettant une limite finie en  $+\infty$ , montrer qu'alors  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 665** Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| + \varepsilon.$$

**Exercice 666** Soit  $(f, g) \in C([0, 1], [0, 1])^2$ , tel que :  $fg = gf$ . On veut montrer que  $f - g$  s'annule par deux méthodes :

- par l'absurde, utiliser le fait que  $(f - g)([0, 1])$  est un segment ne contenant pas 0.
- par l'absurde, en examinant, si  $f - g > 0$  par exemple,  $\min\{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$ .

Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace  $[0, 1]$  par  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 667** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$

**Exercice 668** Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , montrer que :  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty \Leftrightarrow$  l'image réciproque de toute partie bornée est bornée.

**Exercice 669** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On veut démontrer que

$$\sup_{a < x < b} f(x) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

1. Montrer que

$$\sup_{a < x < b} f(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Pour cela, on pourra montrer que  $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$  est un majorant de  $f$  sur  $]a, b[$ .

2. Soit  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ . Montrer que  $f(x_0) = \sup_{a < x < b} f(x)$  en distinguant les trois cas :  $x_0 = a$ ,  $x_0 = b$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ . *Indication* : Dans le cas  $x_0 = a$ , par exemple, on pourra considérer la suite de réels  $a_n = a + 1/n$  et étudier la suite  $(f(a_n))$ .
3. Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$  et  $g(x) = 1$  si  $x = 1$ . Montrer que

$$\sup_{0 < x < 1} g(x) \neq \sup_{0 \leq x \leq 1} g(x).$$

Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

[Exercice corrigé]

## 12.2 Continuité : pratique

**Exercice 670** Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .  
 Pour tout  $\varepsilon > 0$  déterminer  $\alpha$  tel que,  $(x \neq 1/3 \text{ et } |x| \leq \alpha) \Rightarrow |f(x) + 3| \leq \varepsilon$ .  
 Que peut-on en conclure ?

**Exercice 671** Soit  $f$  la fonction réelle à valeurs réelles, strictement croissante définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de  $f$ .
2.  $f$  est-elle continue ?
3. Donner la formule définissant  $f^{-1}$ .

**Exercice 672** Étudier la continuité de  $f$  la fonction réelle à valeurs réelles définie par  $f(x) = (\sin x)/x$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 673** 1. Soit la fonction réelle définie par  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 0$  sinon. Montrer que  $f$  n'admet pas de limite en tout point de  $\mathbb{R}$ .

2. Soit la fonction réelle définie par  $f(x) = x$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 1 - x$  sinon. En quels points de  $\mathbb{R}$   $f$  est-elle continue ?

**Exercice 674** On admet que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ .

1. Montrer que  $x \mapsto \sin x$  est continue en 0 puis sur  $\mathbb{R}$  tout entier.
2. En déduire que  $x \mapsto \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 675** Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

1.  $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$ , et  $f_1(0) = 0$  ;
2.  $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$ , et  $f_2(0) = 0$  ;
3.  $f_3(x) = xE(x)$  ;
4.  $f_4(x) = E(x) \sin(\pi x)$ .

**Exercice 676** Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$  est strictement croissante puis que pour tout  $y \in ]-1, 1[$  il existe un unique  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = y$ .

**Exercice 677** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur  $\mathbb{R}$  ?

$$a) f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; \quad b) f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} ;$$

$$c) f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} .$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 678** Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = E(x) \sin(x)$ ,
2.  $g(x) = E(x) \sin(\pi x)$ .

**Exercice 679** Étudier la continuité de

1.  $f(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$ .
2.  $g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ .

**Exercice 680** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 telle que  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(2x)$ . Montrer que  $f$  est constante.

[Exercice corrigé]

**Exercice 681** La fonction  $\frac{1}{x}$  est-elle lipschitzienne sur  $]0, +\infty[$ ? sur  $[1, +\infty[$ ?

**Exercice 682** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = 1/2 - x$  si  $x \in ]0, 1/2[$ ,  $f(1/2) = 1/2$ ,  $f(x) = 3/2 - x$  si  $x \in ]1/2, 1[$  et  $f(1) = 1$ .

1. Tracer le graphe de  $f$ . Étudier sa continuité.
2. Démontrer que  $f$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$ .
3. Démontrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1 - 2x)$ .

**Exercice 683** Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1.  $f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$      $f_1(0) = 0$ ;
2.  $f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$      $f_2(0) = 0$ ;
3.  $f_3(x) = xE(x)$  sur  $\mathbb{R}$ ;
4.  $f_4(x) = [x - E(x)]^2$  et  $f_5(x) = E(x) + f_4(x)$ .

**Exercice 684** En étudiant la suite  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \cos(u_n)$ , déterminer une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de l'unique réel solution de  $\cos(x) = x$ .

**Exercice 685** Soit  $f$  définie par  $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ , où  $E$  désigne la partie entière. Donner le domaine de définition de  $f$ , puis une relation entre  $f(x + 1)$  et  $f(x)$ .  $f$  est-elle monotone?  $f$  est-elle  $k$ -lipschitzienne sur  $[a, 1]$  ( $a > 0$ )? Et sur  $[0, 1]$ ? Étudier la continuité de  $f$  sur  $[0, 1]$  en utilisant la définition. Déduisez en la continuité sur  $\mathbb{R}$ .

## 12.3 Étude de fonctions

**Exercice 686** Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}; \quad h(x) = \ln(4x + 3)$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 687** Montrer que l'équation  $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $] -1, 1[$ . Même question pour l'équation  $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$ .

**Exercice 688** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $d \in \mathbb{R}^+$ . Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme  $P(X) = X^n - d$  a au moins une racine dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 689** En étudiant les variations de la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ , trouver le plus grand élément de l'ensemble  $f(\mathbb{N}^*)$ .

En déduire que quels soient  $m$  et  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , l'un des nombres  $\sqrt[n]{m}$ ,  $\sqrt[m]{n}$  est inférieur ou égal à  $\sqrt[3]{3}$ .

**Exercice 690 (Partiel Novembre 96)** Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

Montrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ , minorée sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer  $\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ .

[Exercice corrigé]



**Exercice 691** 1. Soit la fonction  $f : [-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ . Montrer que  $f$  admet une réciproque que l'on explicitera.

2. Trouver un intervalle de  $\mathbb{R}$  sur lequel la fonction  $g(x) = \tan(x^3)$  admette une fonction réciproque (on précisera alors le domaine de définition de cette réciproque et son image).

**Exercice 692** Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas des polynômes :

$$x \rightarrow e^x, \quad x \rightarrow \ln x, \quad x \rightarrow \sqrt{x^2+1}, \quad x \rightarrow \cos x.$$

## 12.4 Fonctions continues par morceaux

**Exercice 693** Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in CM([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

Montrer que l'on peut choisir  $\phi \in E([a, b], \mathbb{R})$ , ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in E([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b], |g(x) - \phi(x)| < \varepsilon.$$

NB : CM pour continue par morceaux et E pour escalier.

**Exercice 694** Donner un exemple de fonction qu'on ne puisse approcher à  $\varepsilon$  près par des fonctions en escaliers.

**Exercice 695** On dit qu'un ensemble  $A$  de fonctions définies sur un intervalle  $I = [a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est dense dans un ensemble  $B$  si :

$$\forall f \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A, \forall x \in I, |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Le cours dit par exemple que l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux si  $I = [a, b]$ . Montrer que l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

**Exercice 696** On dit qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions définies sur  $I = [a, b]$  converge uniformément vers  $f$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , et que toutes les  $f_n$  sont continues. Montrer que  $\forall x \in [a, b]$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et donner sa limite. Montrer que  $f$  est bornée et continue.

On ne suppose plus que  $(f_n)_n$  converge uniformément mais seulement point par point (ie,  $\forall x \in [a, b]$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers  $f(x)$ ); de plus toutes les  $f_n$  sont lipschitziennes de rapport  $k$ ; montrer que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $k$  et qu'il y a convergence uniforme.

**Exercice 697**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation bornée si et seulement si :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^+, \forall d = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} \text{ subdivision de } [a, b], \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sigma(d) \leq \mu.$$

On appelle alors  $V(a, b) = \sup_{d \text{ subdivision}} \sigma(d)$  et on définit une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^+$  :  $x \rightarrow V(a, x)$ .

Montrer que toute fonction monotone est à variation bornée puis que  $x \rightarrow V(a, x)$  est croissante ainsi que  $x \rightarrow V(a, x) - f(x)$ . En déduire que toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions croissantes (d'où la nature de ses discontinuités). Une fonction continue, une fonction lipschitzienne sont-elles à variation bornée ?

## 13 Dérivabilité

### 13.1 Calculs

**Exercice 698** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad \text{si } x \neq 1 \quad f_3(1) = 1.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 699** Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{sinon}$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 700** Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore  $f$  la fonction prolongée. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais que  $f'$  n'est pas continue en 0.

[Exercice corrigé]

**Exercice 701** Calculer la fonction dérivée d'ordre  $n$  des fonctions  $f, g, h$  définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 702** Calculer les dérivées d'ordre  $n$  des fonctions :

$$f(x) = \frac{2x - 5}{(x - 2)^2(x + 1)(x - 3)} \quad g(x) = \ln(1 + x).$$

**Exercice 703 (Formule de Leibnitz)** Étant données  $u$  et  $v$  des fonctions dérivables à l'ordre  $n$  sur l'intervalle  $I$ , montrer par récurrence que la dérivée d'ordre  $n$  du produit  $uv$  sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

**Exercice 704** Étudier la dérivabilité sur  $\mathbb{R}$  des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \quad g : x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}, \quad h : x \mapsto \frac{1}{1 + |x|}.$$

**Exercice 705** Calculer les dérivées des fonctions :

1.  $x \mapsto \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$ ,  $x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$ .
2.  $x \mapsto \log\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$ ,  $x \mapsto (x(x-2))^{1/3}$ .

**Exercice 706** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer la dérivée de  $x \mapsto \sin(f(x)^2)$  et de  $x \mapsto \sin(f(x^2))$ .
2. On suppose  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer la dérivée de  $x \mapsto \log(|f(x)|)$ .

**Exercice 707** Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de

1.  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ .
2.  $g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$ .

**Exercice 708** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$

Déterminer  $a, b, c$  pour que  $f$  soit  $C^2$  (et  $C^3$  ?).

**Exercice 709** Soit  $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est  $C^\infty$  et que  $\forall n \in \mathbb{N} f^{(n)}(0) = 0$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 710** Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ . Calculer  $f^{(n)}$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ .

**Exercice 711** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, f(0) = 0.$$

Montrer que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et calculer ses dérivées en 0.

**Exercice 712** Calculer la dérivée de  $x \mapsto \ln \cos(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1})$ .

**Exercice 713** La fonction  $x \mapsto \cos \sqrt{x}$  est-elle dérivable en 0 ?

**Exercice 714** En quels points la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, f(x) = 0,$$

est-elle dérivable ?

## 13.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

**Exercice 715** Montrer que le polynôme  $P_n$  défini par

$$P_n(t) = [(1-t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré  $n$  dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à  $[-1, 1]$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 716** Etudier la fonction  $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$  sur  $\mathbb{R}$  et en déduire que l'équation  $x^5 - 5x + 1 = 0$  a trois solutions réelles.

**Exercice 717** Montrer que le polynôme  $X^n + aX + b$  ( $a$  et  $b$  réels) admet au plus trois racines réelles.

[Exercice corrigé]

**Exercice 718** Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $]a, b[$  s'annulant en  $n + 1$  points de  $]a, b[$ . Montrer que si  $f^{(n)}$  est continue, il existe un point  $x_0$  de  $]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(x_0) = 0$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 719** Étant donné  $y$  un réel positif et  $n$  un entier naturel pair, montrer que  $(x + y)^n = x^n + y^n$  si et seulement si  $x = 0$ . Cas  $n$  impair ?

**Exercice 720** Soit  $f$  une fonction continue et dérivable sur  $[a, +\infty[$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(a)$ . Montrer qu'il existe un élément  $c$  dans  $]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 721** Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  préciser le nombre  $\theta$  de  $]\alpha, \beta[$ . Interprétation géométrique ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 722** Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$$

(où  $a, b, c, \alpha$  sont réels, et  $c$  et  $\alpha$  sont non nuls) sur l'intervalle  $[0, X]$ .

1. Calculer " $\theta$ " en fonction de  $X$ .
2. En déduire que

$$x \mapsto \frac{1}{\alpha x} \ln \frac{e^{2x} - 1}{\alpha x}$$

est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 723** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $[a, a + 2h]$ . Par introduction de la fonction

$$g(t) = f(a + t + h) - f(a + t)$$

montrer qu'il existe  $\alpha$  dans  $]0, 2[$  tel que

$$f(a) - 2f(a + h) + f(a + 2h) = h^2 f''(a + \alpha h).$$

**Exercice 724** Soient  $x$  et  $y$  réels avec  $0 < x < y$ .

1. Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$

De l'étude de  $f$  déduire que pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 725** Par application du théorème des accroissements finis à  $f(x) = \ln x$  sur  $[n, n+1]$  montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

[Exercice corrigé]

**Exercice 726** Étant donné  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ , montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^\alpha}.$$

**Exercice 727** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$ .

[Exercice corrigé]

### 13.3 Divers

**Exercice 728** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$  où  $k$  est un nombre réel. Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles l'origine est un extremum local de  $f$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 729** Appliquer la règle de l'Hôpital aux calculs des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cotan x.$$

**Exercice 730** Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{x^4 e^x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( \exp \frac{1}{x} - \exp \frac{1}{x+1} \right).$$

**Exercice 731** Soit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$ .

**Exercice 732** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $\lim_{+\infty} f' = l$ . Montrer qu'alors  $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ .

**Exercice 733** Déterminer les extremums de  $f(x) = x^4 - x^3 + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 734** Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de  $f_\lambda$  quand  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ , où :

$$f_\lambda : x \rightarrow \lambda e^x + x^2.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 735** Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en 0 telles que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

**Exercice 736** Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(\omega) = \omega$ . On définit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la donnée de  $x_0$  et la récurrence  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer que si  $|f'(\omega)| < 1, \exists \varepsilon > 0, \forall x_0 \in ]\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon[, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\omega$ , et que si  $|f'(\omega)| > 1$  la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\omega$  si et seulement si elle est stationnaire (i.e.  $x_n = \omega$  à partir d'un certain rang). Que dire dans le cas  $|f'(\omega)| = 1$  ?

**Exercice 737** Soit  $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$ , telle que  $f(0) = 0$ . Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

**Exercice 738 (Examen 2000)** Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ) et dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

1. Montrer que  $g(x) \neq g(a)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . (Raisonnement par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
2. Posons  $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  et considérons la fonction  $h(x) = f(x) - pg(x)$  pour  $x \in [a, b]$ . Montrer que  $h$  vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , où  $\ell$  est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. Application : Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arccos } x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 739 (Examen 2000)** Soit  $n \geq 2$  un entier fixé et  $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x \geq 0$ .  
(b) En étudiant le signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer que  $f$  atteint un minimum sur  $\mathbb{R}^+$  que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Montrer que si  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $y \in \mathbb{R}^+$  alors on a

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 740** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en particulier en  $t = 0$ .
2. Etudier l'existence de  $f''(0)$ .
3. On veut montrer que pour  $t < 0$ , la dérivée  $n$ -ième de  $f$  s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où  $P_n$  est un polynôme.

- (a) Trouver  $P_1$  et  $P_2$ .
- (b) Trouver une relation de récurrence entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P'_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

[Exercice corrigé]

## 14 Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

### 14.1 Fonctions circulaires inverses

**Exercice 741** Écrire sous la forme  $\frac{m}{n}\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|m|$  et  $n$  premiers entre eux,  $\arcsin(\sin \alpha)$ ,  $\arccos(\cos \alpha)$  et  $\arctan(\tan \alpha)$  dans les cas :  $\alpha = \frac{59}{5}\pi$ ;  $\alpha = \frac{84}{5}\pi$ ;  $\alpha = \frac{76}{5}\pi$ .

**Exercice 742** Résoudre les équations suivantes :

1.  $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$ .
2.  $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$ .

**Exercice 743** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

**Exercice 744** Soient les fonctions  $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$  et  $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ .

1. Simplifier les expressions de  $f(x)$  et  $g(x)$ .
2. Construire les graphes de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 745** Une statue de hauteur  $s$  est placée sur un piédestal de hauteur  $p$ . À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

**Exercice 746** Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 747** Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 748** Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \quad x \mapsto f(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

**Exercice 749** Résoudre les équations suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 750** Calculer

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.$$

**Exercice 751** Simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arctan}(\tan x) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right), \quad \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$\operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

**Exercice 752** Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 753** Montrer que  $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$  (on montrera que  $0 \leq \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{8}$  et  $0 \leq \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ ).

**Exercice 754** Étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{arctan} \frac{1}{k^2 - k + 1}.$$

On montrera qu'elle converge (vers  $\ell$ ) et on évaluera  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(u_n - \ell)$ .

*Indication* : que vaut  $\operatorname{arctan} a - \operatorname{arctan} b$  ?

**Exercice 755** Étudier la fonction :

$$\phi : x \rightarrow \operatorname{arcsin} \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arccos} \frac{2x}{1+x^2}.$$

**Exercice 756** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$  :

$$\operatorname{arctan}(x-1) + \operatorname{arctan}(x) + \operatorname{arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$



## 14.2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

**Exercice 757** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (\cos x + \operatorname{ch} y, \cos x \operatorname{ch} y).$$

Discuter et déterminer selon  $p \in \mathbb{R}$  l'image réciproque de  $(4, p)$ . On exprimera  $y$  à l'aide d'un logarithme. Déterminer numériquement cette image réciproque si  $p = -2$ .

**Exercice 758** 1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions ; y a-t-il des solutions continues sur  $\mathbb{R}^+$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 759** Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 760** Donner une expression plus simple de :

$$y = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

**Exercice 761** Calculer pour  $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a + bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a + bk).$$

**Exercice 762** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , résoudre le système  $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} y = b \end{cases}$ .

**Exercice 763** Montrer que :  $\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z = \operatorname{argth} u$  et déterminer  $u$ .

**Exercice 764** Les réels  $x$  et  $y$  étant liés par

$$x = \ln \left( \tan \left( \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

calculer  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  et  $\operatorname{th} x$  en fonction de  $y$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 765** Montrer que  $\operatorname{ch} nx$  et  $\operatorname{sh} nx$  peuvent s'exprimer comme polynômes en  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$ . Calculer  $\operatorname{ch} 3x$  et  $\operatorname{sh} 3x$  en fonctions de  $\operatorname{ch} x$  et  $\operatorname{sh} x$ . En déduire  $\operatorname{th} 3x$  en fonction de  $\operatorname{th} x$ .

**Exercice 766** Exprimer  $\operatorname{ch}^n x$  et  $\operatorname{sh}^n x$  au moyen de  $\{\operatorname{sh} px, \operatorname{ch} px ; 1 \leq p \leq n\}$ . Expliciter  $\operatorname{ch}^5 x$  et  $\operatorname{sh}^5 x$ .

**Exercice 767** Calculer les sommes

$$1 + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx \quad \text{et} \quad 1 + \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx.$$

**Exercice 768** Simplifier

$$\operatorname{Argth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

**Exercice 769** Vérifier les égalités

$$2 \operatorname{Argth} \tan x = \operatorname{Argth} \sin 2x, \quad \operatorname{Argsh}(3x + 4x^3) = 3 \operatorname{Argsh} x.$$

**Exercice 770** Expliciter au moyen de la fonction logarithme  $\operatorname{Argch} \frac{1}{x}$  et  $\operatorname{Argsh} \frac{1}{x}$ .

**Exercice 771** Résoudre

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x};$$

$$xy = a^2 \text{ et } \ln^2 x + \ln^2 y = \frac{5}{2} \ln^2 a.$$

**Exercice 772** Préciser les comportements

de  $x \mapsto \frac{x^2 - e^x}{x - e}$  quand  $x \rightarrow e$ ,

de  $x \mapsto \sqrt{\ln(1+x)} - \sqrt{\ln x}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

de  $x \mapsto \frac{a^x - b^x}{x}$  quand  $x \rightarrow 0$ .

**Exercice 773** Démontrer les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \text{ pour } x > 0 \quad \text{et} \quad 1+x \leq e^x \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 774** Déterminer  $\lim_{+\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x))$ .

**Exercice 775** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{ch}(2x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$ . En déduire un équivalent de  $\operatorname{ch} x - 1$  en 0.

**Exercice 776** Résoudre l'équation  $x^y = y^x$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers positifs non nuls.

[Exercice corrigé]

**Exercice 777** Résoudre l'équation  $\tan(3 \arcsin x) = 1$ . On exprimera les trois solutions au moyen de radicaux.

## 15 Calculs d'intégrales

### 15.1 Théorie

**Exercice 778** Déterminer les fonctions  $f$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\int_a^b f(t) dt = (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$ .

**Exercice 779** Soient  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  et  $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $I_n \rightarrow 0$ .

2. Montrer que ceci est encore vrai si  $f$  est en escalier.

3. En déduire que le résultat subsiste pour  $f$  continue par morceaux.

**Exercice 780** Soient  $0 < a \leq b$ . Montrer que  $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$ .

**Exercice 781** Soit  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$ . Montrer qu'il existe  $a \in ]0, 1[$  telle que  $f(a) = a$ .

**Exercice 782** Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$ . On définit  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \end{cases}$ .

1. Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0.

2. Montrer que si  $f$  est périodique,  $g$  admet une limite en  $+\infty$ .

**Exercice 783** Soit  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_0^1 f(u)u^k du = 0.$$

Montrer que  $f$  admet au moins  $n + 1$  zéros distincts dans  $]0, 1[$ .

**Exercice 784** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue strictement croissante telle que :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

**Exercice 785** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, n'admettant qu'un nombre fini de zéros sur  $[0, 1]$ , et telle que  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 e^{nt} f(t)dt \right| = +\infty.$$

**Exercice 786 (Irrationalité de  $\pi$ )** 1. Soit  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que le polynôme  $P_n = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!}$  et ses dérivées successives prennent, en 0 et  $\frac{a}{b}$ , des valeurs entières.

2. Montrer que :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t)dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

3. Montrer par l'absurde que  $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exercice 787** Soit  $f$  continue sur  $[0, \pi]$  telle que  $\int_0^\pi f(u) \cos(u)du = \int_0^\pi f(u) \sin(u)du = 0$ , montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois sur  $]0, \pi[$ .

**Exercice 788** Soit  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$  telle que :

$$\forall g \in E([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 fg = 0.$$

Montrer que  $f = 0$ .

**Exercice 789** Soit  $f$  une fonction  $C^1$  sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $f(a) = 0$ . Montrer que :

$$\int_a^b f^2(u)du \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)du.$$

**Exercice 790** Soit  $f$  continue sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[a, b]$ . On suppose  $a < 0 < b$  et  $\int_0^1 f(t)dt = 0$ . Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leq -ab.$$

**Exercice 791** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ( $a < b$ ), et  $f$  continue positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

**Exercice 792** Calculer sans utiliser de primitive, pour  $a < b$  :

$$\int_a^b e^t dt.$$

**Exercice 793** Soit  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^1 f^n(u)du$  ne prenne qu'un nombre fini de valeurs quand  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $f = -1$  ou  $f = 0$  ou  $f = 1$ .

**Exercice 794** Soient  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  croissantes. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \left( \int_0^x f \right) \left( \int_0^x g \right) \leq x \int_0^x fg.$$

*Indication* : on établira d'abord que, si  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  et  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , alors :

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Remarquer que :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

**Exercice 795** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt.$$

Éventuellement, en donner un DL en  $\frac{1}{n}$ .

**Exercice 796** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx.$$

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue ; calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n f(x) dx.$$

**Exercice 797** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux, continue en 0, trouver une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions en escaliers telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t)g_n(t)dt = f(0).$$

**Exercice 798** Dire (avec justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Toute fonction intégrable sur  $[a, b]$  est continue.

2. Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ ,  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ .
3. Soit  $f$  une fonction sur  $[a, b]$  vérifiant la propriété : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g_\varepsilon$  intégrable sur  $[a, b]$  telle que  $\forall x \in [a, b]$ ,  $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ ; alors  $f$  est intégrable.
4. Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
5. Si  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
6. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables sur  $[a, b]$ , alors la fonction  $fg$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
7. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues sur  $[a, b]$ , alors la fonction  $fg$  est continue sur  $[a, b]$ , et  $\int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b f(t) dt \cdot \int_a^b g(t) dt$ .
8. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$\begin{cases} f \equiv \lambda_n & \text{sur } ]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \text{ pour tout entier } n \geq 1 \\ f(0) = \mu \end{cases}$$

où  $(\lambda_n)$  est une suite bornée de nombres réels, et  $\mu$  un nombre réel. Alors  $f$  est intégrable.

9. Soit  $f$  bornée sur  $[0, 1]$ , continue sauf au point  $1/3$ ; alors  $f$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .
10. Il existe  $f \geq 0$  continue sur  $[0, 1]$ , avec  $f(1/2) > 0$ , et telle que  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ .
11. Soit  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ . Si  $\int_a^b f(t) dt > 0$  alors  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ .
12. Si  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , elle est intégrable sur  $[a, b]$  et de plus  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est croissante.
13. Si  $f \leq 0$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $G(x) = \int_x^b f(t) dt$  est croissante sur  $[a, b]$ .
14. Si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ ,  $H(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , et  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $H'(x) = f(x^2)$ .

**Exercice 799** Soit  $\varphi$  une fonction bornée sur  $[a, b]$ ; comparer les assertions suivantes<sup>1</sup> :

1.  $\varphi$  a une primitive sur  $[a, b]$ .
2.  $\varphi$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
3.  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ .
4.  $\varphi$  est dérivable sur  $[a, b]$ .

**Exercice 800** Soit  $f$  une fonction continue et strictement croissante de  $[a, b]$  sur  $[\alpha, \beta]$ . On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$ . Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx + \int_\alpha^\beta g(x) dx = b\beta - a\alpha$$

**Exercice 801** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$ . On suppose que  $f$  est monotone sur  $[a, b]$  et que  $g$  est positive sur  $[a, b]$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt + f(b) \int_c^b g(t) dt$$

(considérer  $\varphi(x) = f(a) \int_a^x g(t) dt + f(b) \int_x^b g(t) dt$ ).

<sup>1</sup>L'une des implications à étudier est très difficile; on pourra admettre après avoir traité toutes les autres que celle qui reste est fausse.

**Exercice 802** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[0, 1]$ , vérifiant :

- i)  $0 \leq f' \leq 2$ ;
- ii)  $f'$  est décroissante;
- iii)  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Trouver le plus grand nombre  $m$  et le plus petit nombre  $M$  tels qu'on soit sûr d'avoir  $m \leq \int_0^1 f(t) dt \leq M$ . Peut-il y avoir égalité ?

**Exercice 803** Soit  $f$  définie et continue sur  $[0, +\infty[$ , vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l$  (étant donné  $\varepsilon > 0$ , choisir  $A$  assez grand pour que sur  $[A, +\infty[$  on ait  $l - \varepsilon \leq f(t) \leq l + \varepsilon$ ; puis encadrer  $\frac{1}{x} \int_A^x f(t) dt$ , pour  $x > A$ ; estimer l'erreur... et faire un dessin!).

Pour  $x \geq 0$ , on pose  $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{1+t^2}} dt$ . Étudier la branche infinie du graphe de  $F$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 804 (Méthode des trapèzes)** 1. Soit  $f$  deux fois dérivable sur  $[a, b]$ , vérifiant  $|f''| \leq M$  sur  $[a, b]$ . Soit

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a) \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - A(b-t)(t-a)$$

Soit  $x \in ]a, b[$ ; on choisit  $A = A(x)$  pour que  $\varphi(x) = 0$  (dessiner!). Montrer qu'il existe  $c_1, c_2 \in [a, b]$  tels que  $c_1 < c_2$  et  $\varphi'(c_1) = \varphi'(c_2) = 0$ , puis qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $\varphi''(c) = 0$ . En déduire une majoration de  $|A|$  pour  $x \in [a, b]$ . On convient de poser  $A(a) = A(b) = 0$ .

2. On note  $E$  l'erreur commise en remplaçant  $\int_a^b f(x) dx$  par l'aire du trapèze défini par l'axe des  $x$ , les droites  $x = a$  et  $x = b$  et la corde du graphe joignant les points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$  (dessiner!). Montrer que  $E = \int_a^b A(x)(b-x)(x-a) dx$ , et vérifier que l'intégrale a un sens. En déduire que  $|E| \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$  (utiliser 1)).
3. Pour  $n \geq 1$  on pose  $I_n = \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right]$  où  $x_p = a + p \frac{b-a}{n}$  pour  $p = 1, 2, \dots, n-1$ . Montrer que  $I_n$  est la somme des aires des trapèzes construits sur les points d'abscisses  $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$  et les cordes correspondantes du graphe de  $f$  (dessiner!). Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_n \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

4. On prend  $[a, b] = [0, 1]$  et  $f(x) = e^{-x^2}$ . Calculer  $M = \sup_{[0,1]} |f''|$ . Déterminer  $n$  pour que la méthode des trapèzes avec  $n$  intervalles donne un nombre qui approche  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  à moins de  $10^{-2}$  près. En déduire un encadrement de cette intégrale.

## 15.2 Longueurs, aires, volumes

**Exercice 805** Construire la courbe paramétrée  $C \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1+\lambda \cos t} \\ y = \frac{\sin t}{1+\lambda \cos t} \end{cases}$  où  $\lambda$  est un paramètre appartenant à  $[0, 1[$ .

Calculer l'aire  $S$  limitée par  $C$  de deux façons :

- En se ramenant au calcul de  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1+\lambda \cos t)^2}$ .
- En reconnaissant la nature géométrique de  $C$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 806** Représenter la courbe définie par son équation polaire  $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ . Calculer sa longueur  $L$  et les aires  $A_1$  et  $A_2$  limitées par les deux boucles qu'elle forme.

[Exercice corrigé]

**Exercice 807** On appelle *tore* la figure obtenue par révolution d'un cercle de rayon  $r$  autour d'une droite de son plan passant à distance  $R$  de son centre (on suppose  $r < R$ ). Calculer l'aire  $A$  du tore, et son volume  $V$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 808** On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon  $R$ , lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur une droite en restant dans plan fixe. Montrer que dans

un repère bien choisi, la cycloïde admet la représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Représenter la cycloïde et calculer : la longueur  $L$  d'une arche, l'aire  $A$  de la surface  $S$  comprise entre cette arche et la droite fixe ( $Ox$ ), les volumes  $V_1$  et  $V_2$  obtenus par révolution de  $S$  autour de  $Ox$  et  $Oy$  respectivement, les aires  $A_1$  et  $A_2$  obtenues par révolution d'une arche de la cycloïde autour de  $Ox$  et  $Oy$  respectivement.

[Exercice corrigé]

**Exercice 809** On appelle *épicycloïde* la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon  $r$ , lié à ce cercle, quand celui-ci roule sans glisser sur un cercle de rayon  $R$  en restant tangent extérieurement à ce dernier, et dans son plan. On pose  $n = R/r$ . Montrer que dans un repère que l'on précisera, l'épicycloïde admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = r((n+1)\cos t - \cos(n+1)t) \\ y = r((n+1)\sin t - \sin(n+1)t) \end{cases}$$

Représenter la courbe pour  $n = 1, 2, 3$ . En supposant  $n$  entier, calculer la longueur  $L$  de la courbe et l'aire  $A$  limitée par celle-ci. Dans le cas  $n = 1$  (*cardioïde*), calculer de plus l'aire  $S$  de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe autour de son axe de symétrie, ainsi que le volume  $V$  limitée par cette surface.

[Exercice corrigé]

**Exercice 810** Soit  $C$  un cercle fixe de rayon  $R$ . Un cercle  $C'$  de même rayon roule sans glisser sur  $C$  en restant dans un plan (variable) perpendiculaire à celui de  $C$ . Un point  $M$  lié au cercle  $C'$  décrit une courbe  $\Gamma$ . Montrer que suivant un repère convenablement choisi,  $\Gamma$  admet

la représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = R(\cos t + \sin^2 t) \\ y = R \sin t(1 - \cos t) \\ z = R(1 - \cos t) \end{cases}$$
. En déduire la longueur  $L$  de  $\Gamma$ .

Représenter les projections de  $\Gamma$  sur chacun des trois plans de coordonnées.

[Exercice corrigé]

### 15.3 Intégration à l'aide d'une fonction auxiliaire

**Exercice 811** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad ; \quad \int e^x \sin(e^x) dx \quad ; \quad \int \tan^3 x dx \quad ;$$

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx \quad ; \quad \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^m} dx, \quad m \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\operatorname{sh}^5 x}.$$

## 15.4 Changement de variables

**Exercice 812** Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

Effectuer le changement de variables  $u = \sqrt{e^x - 1}$  et calculer  $I$ .

*Résultat* :  $I = 2 - \pi/2$ .

**Exercice 813** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante et continûment dérivable.

On considère les deux intégrales  $I_1 = \int_a^b f(t) dt$  et  $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt$ .

1. Rappeler pourquoi  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
2. Faire le changement de variable  $t = f(u)$  dans l'intégrale  $I_2$ .
3. Calculer  $I_2$  en fonction de  $I_1$ .
4. Faire un dessin faisant apparaître  $f$  et  $f^{-1}$ , et interpréter ce résultat géométriquement.

**Exercice 814** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, \quad (t = \sqrt[6]{2+x});$$

$$\int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx, \quad \left(\frac{x-1}{2} = \operatorname{th} u \text{ ou } \operatorname{coth} u\right);$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad ; \quad \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx.$$

## 15.5 Intégration par parties

**Exercice 815** Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \operatorname{Arctan} x dx \quad ; \quad \int (x^2 + x + 1)e^x dx.$$

**Exercice 816** Soit  $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ .

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .
2. Calculer  $I_n$ .
3. En déduire  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$ .

**Exercice 817** Soit  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(a-x)(b-x) dx$ .
2. En déduire un encadrement de  $\int_a^b f(t) dt$  si  $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f''(x) \leq M$ .

**Exercice 818 (Intégrales de Wallis)** Soit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ .

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .
2. En déduire  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$ .
3. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que  $I_n \sim I_{n+1}$ .



5. Calculer  $nI_n I_{n+1}$ .

6. Donner alors un équivalent simple de  $I_n$ .

**Exercice 819** Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ .

2. Calculer  $I_n + I_{n+1}$ .

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$ .

**Exercice 820** Calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}.$$

**Exercice 821** Calculer par récurrence :

$$J_n = \int_1^e \log(u)^n du.$$

## 15.6 Polynôme en sin, cos, ou en ch, sh

**Exercice 822** Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x dx \quad ; \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x dx.$$

**Exercice 823** Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$x \cos^2 x$$

$$\cos(2x) \cos^2 x$$

## 15.7 Fractions rationnelles

**Exercice 824** Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1.  $\frac{1}{a^2 + x^2}$ .

2.  $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ .

3.  $\frac{x^3}{x^2 - 4}$ .

4.  $\frac{4x}{(x-2)^2}$ .

5.  $\frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

6.  $\frac{1}{(t^2 + 2t - 1)^2}$ .

7.  $\frac{3t + 1}{(t^2 - 2t + 10)^2}$ .
8.  $\frac{3t + 1}{t^2 - 2t + 10}$ .
9.  $\frac{1}{t^3 + 1}$ .
10.  $\frac{x^3 + 2}{(x + 1)^2}$ .
11.  $\frac{x + 1}{x(x - 2)^2}$ .
12.  $\frac{(x^2 - 1)(x^3 + 3)}{2x + 2x^2}$ .
13.  $\frac{x^2}{(x^2 + 3)^3(x + 1)}$ .
14.  $\frac{x^7 + x^3 - 4x - 1}{x(x^2 + 1)^2}$ .
15.  $\frac{3x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 11x + 7}{(x - 1)^3(x^2 + 1)}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 825** Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2}$ .
2.  $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$ .
3.  $\int_2^3 \frac{2x + 1}{x^2 + x - 3} dx$ .
4.  $\int_0^2 \frac{x dx}{x^4 + 16}$ .
5.  $\int_0^3 \frac{x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{(x - 4)^3} dx$ .
6.  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}$ .
7.  $\int_{-1}^1 \frac{2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 17x + 30}{x^3 + 8} dx$ .
8.  $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx$ .
9.  $\int_{-1}^0 \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$ .
10.  $\int_1^2 \frac{2x^8 + 5x^6 - 12x^5 + 30x^4 + 36x^2 + 24}{x^4(x^2 + 2)^3} dx$ .
11.  $\int_0^a \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$  pour  $a \in \mathbb{R}$ . Y a-t-il une limite quand  $a \rightarrow +\infty$  ?

$$12. \int_0^2 \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 826** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4 + 1}{x(x-1)^3} dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2} \quad ; \quad \int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x^2 - 2x - 2)^2}.$$

**Exercice 827** Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

$$\frac{2x}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$\frac{1}{(1+x^3)^3}$$

## 15.8 Fractions rationnelles en sin, cos ou en sh, ch

**Exercice 828** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx \quad ; \quad \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{1 + \sin 2x} dx \quad ;$$

$$\int \frac{\tan x - \tan a}{\tan x + \tan a} dx \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x} dx.$$

**Exercice 829** Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{1 + \tan x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}$$

## 15.9 Intégrales abéliennes

**Exercice 830** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\sqrt{9+4x^4}} dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x+2} dx \quad ; \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{-4x^2+4x+1}} dx.$$

**Exercice 831** Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\frac{8x-3}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+4}$$

## 15.10 Primitives diverses

**Exercice 832** Calculer les primitives suivantes.

1.  $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x \, dx.$
2.  $\int \cos^5 t \, dt; \int \cosh^3 t \, dt; \int \cos^4 t \, dt; \int \sinh^4 t \, dt.$
3.  $\int x^3 e^x \, dx.$
4.  $\int \ln x \, dx; \int x \ln x \, dx; \int \arcsin x \, dx.$
5.  $\int \cosh t \sin t \, dt.$
6.  $\int \frac{dx}{\sin x}.$
7.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$
8.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx.$
9.  $\int e^{ax} \cos bx \, dx; \int e^{ax} \sin bx \, dx.$
10.  $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}} \, dx$  pour  $0 < x < 1.$
11.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$
12.  $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$
13.  $\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$  avec  $0 < x < a.$
14.  $\int \frac{\cosh x}{\cosh x + \sinh x} \, dx.$

[Exercice corrigé]

**Exercice 833** Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}} \quad ; \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \tan^2 x} dx \quad ;$$

$$\int \frac{\sin ax + \cos bx}{e^x} dx \quad ; \quad \int \frac{x(2 + \cos x)}{\sin^2 x} dx.$$

**Exercice 834** Déterminer les intervalles d'étude et calculer les primitives des fonctions :

$$\operatorname{ch} x \sin(2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 + \tan^2 x}}$$

$$(x^2 + 2x + 2) \cos(2x)$$

$x^2 \cos x$  et  $x^2 \sin x$  en utilisant les complexes

$$\frac{1}{(x^2 - 1)^3} \text{ et } \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \\ \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$$

**Exercice 835** Calculer  $\int_0^1 \ln(1+x^2)$ .

**Exercice 836** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2+k^2} \right)$ .

**Exercice 837** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ .

**Exercice 838** Soient  $I = \int_0^\pi x \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$ .

1. Calculer  $I$  et  $I + J$ .
2. En déduire  $J$ .

**Exercice 839** Soit  $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ .

1. Calculer  $a_0, \dots, a_4$ .
2. Etudier la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 15.11 Sommes de Riemann

**Exercice 840** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

**Exercice 841** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} ; \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

et donner un équivalent de  $u_n - \ell$ .

**Exercice 842** Soient  $f$  et  $g$  continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

**Exercice 843** Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

**Exercice 844** Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{n}{n^2 + p^2}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \frac{(3n + 6p - 4)(n + 2p)^2}{3n^3}$ .

## 16 Équations différentielles

### 16.1 Premier ordre

**Exercice 845** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' = y + x$  avec  $y(0) = 1$ ,
2.  $y' = \cos x + y$ ,
3.  $y' + 2y = (x - 2)^2$ .

**Exercice 846** Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution passant par le point  $M(.,.)$  et tracer sommairement le graphe de la solution.

1.  $y' + 2xy = 0$ ,  $M = (0, 1)$ ,
2.  $y' + y \tan x = \sin x \cos x$   $M = (\frac{\pi}{4}, 0)$ ,
3.  $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$ , On déterminera  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ .

**Exercice 847 (Partiel de Novembre 1994)** On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans  $]0, \infty[$  l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer  $a \in ]0, \infty[$  tel que  $y(x) = ax$  soit une solution particulière  $y_0$  de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue :  $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$  transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E1) \quad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E1) sur  $]0, \infty[$ .
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur  $]0, \infty[$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 848** Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1.  $y'(t) + 2y(t) = 0$ ;
2.  $\frac{dx}{dt} - x = 0$ ;
3.  $y'(x) + 2y(x) = 0$  avec  $(y - y')(0) = 0$ .

**Exercice 849** Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1.  $(1 + x^2)y' - xy = 0$ ;

2.  $y' + y \tan x = 0$ , pour  $x$  dans  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

**Exercice 850** Trouver les solutions réelles sur l'intervalle maximal de l'équation différentielle :

$$t^2 y' + y = 1.$$

**Exercice 851** Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 2xy = x.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Calculer la solution de  $(E)$  vérifiant  $y(0) = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 852** Résoudre et raccorder éventuellement :

1.  $xy' - 2y = x^4$ .
2.  $x(1 + x^2)y' = y$ .
3.  $(x^2 + 1)y' + (x - 1)^2 y = x^3 - x^2 + x + 1$ .
4.  $(e^x - 1)y' + (e^x + 1)y = 3 + 2e^x$ .

**Exercice 853** Résoudre le système différentiel :  $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$  et  $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$ .

**Exercice 854** Résoudre l'équation différentielle de Riccati  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$  en trouvant une solution particulière  $y_0$  et en posant  $z = \frac{1}{y - y_0}$ .

**Exercice 855** Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = x^2 + 2x$$

Intégrer  $(E)$  et montrer que par un point donné il passe une et une seule courbe intégrale. Soit  $H$  l'ensemble des points  $M$  tels que la courbe intégrale passant par  $M$  a une tangente horizontale en ce point, et  $I$  l'ensemble des points  $M$  tels que la courbe intégrale passant par ce point a un point d'inflexion en ce point. Tracer  $H, I$  et la courbe intégrale passant par  $O(0, 0)$ . En déduire un tracé géométrique des courbes intégrales.

**Exercice 856** Résoudre le système différentiel :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) + y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 3x(t) - y(t), \\ x(0) &= 2, y(0) = -2. \end{aligned}$$

**Exercice 857** Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ . Montrer que si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

**Exercice 858** Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 1$  et  $f \leq f' \leq 2f$ . Encadrer  $f(-1)$  et  $f(1)$ .

## 16.2 Second ordre

**Exercice 859** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ,
2.  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,
3.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**Exercice 860** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.  $y'' - y = x^3 + x^2$ ,
2.  $y'' - 2y' + y = e^x$ ,
3.  $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$  où  $m \in \mathbb{R}$ ,
4.  $y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$  (utiliser le principe de superposition).

**Exercice 861** On considère l'équation homogène  $(E)$   $ay'' + by' + cy = 0$ , avec  $a \neq 0$ . Donner des conditions nécessaires et suffisantes liant les coefficients  $a, b$  et  $c$  dans les deux cas suivants :

- (i) toutes les solutions de  $(E)$  tendent vers 0 lorsque  $x$  tend vers l'infini ;
- (ii) toutes les solutions sont périodiques.

**Exercice 862** Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de  $k$  et  $m$ .

**Exercice 863** Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 864** Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - y = -6\cos x + 2x\sin x.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 865** Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-x/2}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 866** On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .
2. Trouver une solution particulière de  $(E)$  (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de  $(E)$ .
3. Déterminer l'unique solution  $h$  de  $(E)$  vérifiant  $h(0) = 1$  et  $h(1) = 0$ .
4. Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $]0, \infty[$  et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$



(a) On pose  $g(x) = f(e^x)$ , vérifier que  $g$  est solution de  $(E)$ .

(b) En déduire une expression de  $f$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 867** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \quad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2) \cos mx$$

qui vérifie  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  (Indication : On traitera séparément les cas  $m = 0$  et  $m \neq 0$ ).

**Exercice 868** On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .

2. Trouver une solution particulière de  $(E)$  lorsque, respectivement, on pose :

$$d(x) = (x^2 + 1)e^{-3x} \quad \text{et} \quad d(x) = \cos x.$$

3. Donner la forme générale des solutions de  $(E)$  lorsque :

$$d(x) = 2(x^2 + 1)e^{-3x} + 50 \cos x.$$

**Exercice 869** Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 870** Déterminer une équation différentielle admettant  $(r - 2)^2 = 0$  comme équation caractéristique et  $e^x + (x^3/6)e^{2x}$  comme solution particulière.

**Exercice 871** Déterminer l'ensemble des solutions réelles des équations :

- a)  $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ ,      b)  $y'' + y' - 6y = e^x(2x + 1)$ ,  
 c)  $y'' - 4y' + 13y = \cos x$ ,      d)  $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}(x + 1)$  avec  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$ .

**Exercice 872 (Partiel Novembre 96)** On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E.D.) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où  $d$  est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à  $(E.D.)$ .

2. Trouver une solution particulière de  $(E.D.)$  lorsque  $d(x) = e^{-2x}$  et lorsque  $d(x) = e^{2x}$  respectivement.

3. Donner la forme générale des solutions de  $(E.D.)$  lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 873** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

1.  $y'' - 4y = 4e^{-2x}$ .
2.  $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x$ .
3.  $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ .

4.  $y'' + y = e^{-|x|}$ .

**Exercice 874** Trouver les  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivables telles que  $\forall x \in \mathbb{R} f''(x) + f(-x) = x$ .

**Exercice 875** Résoudre sur  $]0, +\infty[$   $xy'' - y' - x^3y = 0$  en posant  $z(t) = y(\sqrt{t})$ .

**Exercice 876** Résoudre en posant  $z(t) = y(e^t)$  ou  $y(-e^t)$  suivant le signe de  $x$ , les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1.  $x^2y'' - 2y = x$ .

2.  $x^2y'' + xy' + y = x \ln |x|$ .

**Exercice 877** Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli  $x^2y^2 - xy' - 3y = 0$  en supposant que  $y$  ne s'annule pas et en posant  $z = \frac{1}{y}$ .

**Exercice 878** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} x \frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) &= x^4, \\ y''(x) - 4y(x) &= 4e^{-2x}, \\ y''(x) - 2y'(x) + y(x) &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

**Exercice 879** En posant  $z = \frac{1}{y}$  et en supposant que  $y$  ne s'annule pas, résoudre l'équation (de Bernoulli) :

$$x^2 \frac{d^2y(x)}{dx^2} - x \frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0.$$

**Exercice 880** Résoudre :  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x \cos x \cosh x$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 881** Déterminer les  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x \cos x.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 882** Soit  $p$  continue positive non nulle; montrer que toute solution de  $y''(x) + p(x)y(x) = 0$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 883** Montrer que toute solution de  $y''(x)e^{-x^2} + y(x) = 0$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 884** En posant  $t = \arctan x$ , résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 885** Résoudre par le changement de fonction  $z = \frac{y}{x}$  l'équation différentielle :

$$x''^2(x) - 2xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

[Exercice corrigé]

## Troisième partie

# ALGÈBRE 2

## 17 Espaces vectoriels

### 17.1 Définition, sous-espaces

**Exercice 886** Déterminer lesquels des ensembles  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}.$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 887** Soit  $\mathbb{R}_+^*$  muni de la loi interne  $\oplus$  définie par  $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et de la loi externe  $\otimes$  telle que  $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 888** Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\}$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(1) = 0\}, \quad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = 1\}$$

$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3\}, \quad E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + \alpha y + 1 \geq 0\}.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 889** Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x + y = 0\}; \quad E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/xy = 0\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/x = 0, y = z\}; \quad E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x = 1\}.$$

$$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + xy \geq 0\}; \quad E'_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + xy + y^2 \geq 0\}.$$

$$E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(1) = 0\}; \quad E'_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f(0) = 1\};$$

$$E_4'' = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}/f \text{ est croissante}\}.$$

**Exercice 890** Déterminer si  $\mathbb{R}^2$ , muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

$$1. (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$2. (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3. (a, b) + (c, d) = (c, d); \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 891** Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur  $[0, 1]$ , continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

2. L'ensemble des fonctions réelles sur  $\mathbf{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  pour les mêmes opérations.

3. L'ensemble des solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  du système :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

4. L'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(1/2) = 0$ .
5. L'ensemble  $\mathbb{R}_+^*$  pour les opérations  $x \oplus y = xy$  et  $\lambda \cdot x = x^\lambda$ , ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).
6. L'ensemble des fonctions impaires sur  $\mathbb{R}$ .
7. L'ensemble des fonctions sur  $[a, b]$  continues, vérifiant  $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t) dt$ .
8. L'ensemble des fonctions sur  $\mathbb{R}$  qui sont nulle en 1 ou nulle en 4.
9. L'ensemble des fonctions sur  $\mathbb{R}$  qui peuvent s'écrire comme somme d'une fonction nulle en 1 et d'une fonction nulle en 4. Identifier cet ensemble.
10. L'ensemble des polynômes de degré exactement  $n$ .
11. L'ensemble des fonctions de classe  $C^2$  vérifiant  $f'' + \omega^2 f = 0$ .
12. L'ensemble des fonctions sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f(3) = 7$ .
13. L'ensemble des primitives de la fonction  $xe^x$  sur  $\mathbb{R}$ .
14. L'ensemble des nombres complexes d'argument  $\pi/4 + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
15. L'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant  $\sin(x + y) = 0$ .
16. L'ensemble des vecteurs  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux au vecteur  $(-1, 3, -2)$ .
17. L'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $\int_0^1 \sin x f(x) dx = 0$ .
18. L'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré 7.
19. L'ensemble des fonctions paires sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 892** Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / (\exists(a, \varphi) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a \cos(x - \varphi)\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 893** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ . Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soient  $H$  un troisième sous-espace vectoriel de  $E$ . Prouver que

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

**Exercice 894** On munit  $\mathbb{R}^2$  de l'addition usuelle et de la loi externe  $\lambda(x, y) = (\lambda x, y)$ . Est-ce un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

**Exercice 895** Montrer que  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 896** Montrer que

$$F = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists(A, \phi) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos(x + \phi)\}$$

est un espace vectoriel.

## 17.2 Systèmes de vecteurs

**Exercice 897** Soient dans  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs  $\vec{v}_1(1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2(4, 1, 4)$  et  $\vec{v}_3(2, -1, 4)$ .

1. Montrer que  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ne sont pas colinéaires. Faire de même avec  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$ , puis avec  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ .
2. La famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  est-elle libre ?

**Exercice 898** Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $\vec{v}_1(1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2(0, 2, 2)$  et  $\vec{v}_3(3, 7, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $\vec{v}_1(1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2(0, 1, 1)$  et  $\vec{v}_3(1, 1, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $\vec{v}_1(1, 2, 1, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_2(2, 1, 2, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3(1, 0, 1, 1, 0)$  et  $\vec{v}_4(0, 1, 0, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .
4.  $\vec{v}_1(2, 4, 3, -1, -2, 1)$ ,  $\vec{v}_2(1, 1, 2, 1, 3, 1)$  et  $\vec{v}_3(0, -1, 0, 3, 6, 2)$  dans  $\mathbb{R}^6$ .
5.  $\vec{v}_1(2, 1, 3, -1, 4, -1)$ ,  $\vec{v}_2(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$  et  $\vec{v}_3(1, 5, 0, 4, -1, 7)$  dans  $\mathbb{R}^6$ .

**Exercice 899** On considère dans  $\mathbb{R}^n$  une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .
2.  $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ .
3.  $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$ .
4.  $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ .
5.  $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$ .

**Exercice 900** Soient dans  $\mathbb{R}^4$  les vecteurs  $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$  et  $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$ . Peut-on déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  ? Et pour que  $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  ?

**Exercice 901** Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  vérifiant  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . L'ensemble  $E$  est-il un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  ? Si oui, en donner une base.

**Exercice 902** Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ , on se donne cinq vecteurs :  $V_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $V_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $V_4 = (10, 4, 13, 7)$ ,  $V_5 = (1, 7, 8, 14)$ . Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

**Exercice 903** Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ , on se donne cinq vecteurs :  $V_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $V_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $V_4 = (10, 4, 13, 7)$ ,  $V_5 = (1, 7, 8, 14)$ . À quelle(s) condition(s) un vecteur  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

**Exercice 904** Soient les vecteurs  $e_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $e_2 = (1, -2, 3, -4)$  de  $\mathbb{R}^4$ . Peut-on déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$  ? pour que  $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$  ?

**Exercice 905** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $x, y, z, t$  une famille libre d'éléments de  $E$ , les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $x, 2y, z$ .
2.  $x, z$ .
3.  $x, 2x + t, t$ .
4.  $3x + z, z, y + z$ .
5.  $2x + y, x - 3y, t, y - x$ .

**Exercice 906** Dans  $\mathbb{R}^4$ , comparer les sous-espaces  $F$  et  $G$  suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$

**Exercice 907** On suppose que  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  sont des vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Les vecteurs  $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$  sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs  $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$  sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs  $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$  sont-ils linéairement indépendants ?

**Exercice 908** Soient  $E$  et  $F$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  engendrés respectivement par

les vecteurs  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$  et  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$ . Montrer que  $E$  et  $F$  sont égaux.

[Exercice corrigé]

**Exercice 909** Prouver que dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs  $u_1 = (2, 3, -1)$  et  $u_2 = (1, -1, -2)$  engendrent le même s.e.v. que les vecteurs  $v_1 = (3, 7, 0)$  et  $v_2 = (5, 0, -7)$ .

**Exercice 910**

1. Montrer que les systèmes :  $S_1 = (1; \sqrt{2})$  et  $S_2 = (1; \sqrt{2}; \sqrt{3})$  sont libres dans  $\mathbb{R}$  considéré comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
2. Soient, dans  $\mathbb{R}^2$ , les vecteurs  $u_1 = (3 + \sqrt{5}, 2 + 3\sqrt{5})$  et  $u_2 = (4, 7\sqrt{5} - 9)$ . Montrer que le système  $(u_1, u_2)$  est  $\mathbb{Q}$ -libre et  $\mathbb{R}$ -lié.
3. Soient les vecteurs  $v_1 = (1 - i, i)$  et  $v_2 = (2, -1 + i)$  dans  $\mathbb{C}^2$ .
  - (a) Montrer que le système  $(v_1, v_2)$  est  $\mathbb{R}$ -libre et  $\mathbb{C}$ -lié.
  - (b) Vérifier que le système  $S = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$  est une base de l'e.v.  $\mathbb{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , et donner les composantes des vecteurs  $v_1, v_2$  par rapport à cette base.

**Exercice 911**

1. On définit les fonctions suivantes :  $f_1 : t \mapsto \cos t \cdot \text{cht}$ ,  $f_2 : t \mapsto \cos t \cdot \text{sht}$ ,  $f_3 : t \mapsto \sin t \cdot \text{cht}$ ,  $f_4 : t \mapsto \sin t \cdot \text{sht}$ . Montrer que le système  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
2. Même question pour la famille  $\mathcal{F} = \{f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**Exercice 912** Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les trois fonctions  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \sin 2x$ ,  $x \mapsto \sin 3x$ , sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.

**Exercice 913** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $S_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  un système libre dans  $E$ ,  $n \geq 2$ .

1. On considère le système  $S_2 = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  défini par :  $e'_j = \sum_{k=1}^j e_k$ ,  $1 \leq j \leq n$ .  $S_2$  est-il libre ?
2. On considère le système  $S_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  défini par :  $\varepsilon_j = e_j + e_{j+1}$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$  et  $\varepsilon_n = e_n + e_1$ . Montrer les résultats suivants :
  - (a)  $S_3$  libre  $\Rightarrow S_1$  libre.
  - (b)  $n$  impair :  $S_3$  libre  $\Leftrightarrow S_1$  libre.
  - (c)  $n$  pair :  $S_3$  lié.

**Exercice 914** Peut-on déterminer des réels  $x, y$  pour que le vecteur  $v = (-2, x, y, 3)$  appartienne au s.e.v. engendré dans  $\mathbb{R}^4$  par le système  $(e_1, e_2)$  où  $e_1 = (1, -1, 1, 2)$  et  $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 915** Soient  $f(x) = \cos(x)$ ,  $g(x) = \cos(x) \cos(2x)$  et  $h(x) = \sin(x) \sin(2x)$ . Déterminer  $\text{vect}(f, g, h)$ .

**Exercice 916** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha, 0 \text{ sinon} \end{cases}$ . Montrer que la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est libre.

[Exercice corrigé]

**Exercice 917** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $g_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$ . Montrer que la famille  $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est libre.

**Exercice 918** Montrer que les familles suivantes sont libres dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , et ce quelque soit  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$(x \rightarrow |x - a|)_{a=1,3,5,\dots,2N+1}; (x \rightarrow \cos nx)_{n=1,2,\dots,N}; (x \rightarrow e^{ax})_{a=1,\dots,N}$$

### 17.3 Somme directe

**Exercice 919** Soient  $\vec{e}_1(0, 1, -2, 1)$ ,  $\vec{e}_2(1, 0, 2, -1)$ ,  $\vec{e}_3(3, 2, 2, -1)$ ,  $\vec{e}_4(0, 0, 1, 0)$  et  $\vec{e}_5(0, 0, 0, 1)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1.  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ .
2.  $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ .
3.  $\dim(\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}) = 1$ .
4.  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} = \mathbb{R}^4$ .
5.  $\text{Vect}\{\vec{e}_4, \vec{e}_5\}$  est un sous-espace vectoriel de supplémentaire  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 920** On considère les vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $v_5 = (0, 1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

1.  $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$  et  $\text{Vect}\{v_3\}$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?
2. Même question pour  $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$  et  $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$ .

**Exercice 921** Si  $L, M, N$  sont trois sous-espaces vectoriels de  $E$ , a-t-on :

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N ?$$

**Exercice 922** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a)/P\}$$

pour  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que si  $a \neq b$  il existe un couple de réels  $(c, d)$  tels que  $1 = c(X - a) + d(X - b)$ . En déduire que  $E = E_a + E_b$ , la somme est-elle directe ?

**Exercice 923** Soit  $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 924** Soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* dans  $E$  lorsque  $F \cap G = \{0\}$  et  $E = F + G$ . On note  $E = F \oplus G$ .

1. Soient  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Posons  $F = \text{Vect} \{e_1, e_2\}$ ,  $G = \text{Vect} \{e_3, e_4\}$ ,  $G' = \text{Vect} \{e_3, e_4, e_5\}$ . Montrer que  $E = F \oplus G$  et  $E \neq F \oplus G'$ .
2. Supposons que  $E$  est de dimension finie  $n$ , que  $\dim(F) = p$  et  $E = F \oplus G$ .
- Calculer  $\dim(G)$ .
  - Montrer que tout élément  $x$  de  $E$  se décompose d'une manière *unique* en une somme  $x = y + z$  avec  $y \in F$  et  $z \in G$ .
  - Soient  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$  une famille libre de  $F$  et  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_l\}$  une famille libre de  $G$ . Montrer que la famille  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  est libre.
  - Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Construire deux applications linéaires  $\psi$  et  $\psi'$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}^q$  telles que :  $\forall y \in F : \psi'(y) = 0, \forall z \in G : \psi(z) = 0$  et  $\forall x \in E : \varphi(x) = \psi(x) + \psi'(x)$ .

**Exercice 925 (Caractérisation de la somme directe de trois s.e.v.)** Soient  $U, V, W$  des s.e.v. d'un e.v.  $E$ , vérifiant  $(I) : U \cap V = \{0\} = (U + V) \cap W$ .

- Démontrer que  $V \cap W = \{0\} = U \cap (V + W)$ .
- Montrer que  $(I)$  équivaut à

$$(II) : (\forall x \in U + V + W)(\exists!(u, v, w) \in U \times V \times W)(x = u + v + w).$$

**Exercice 926** Soit

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge}\}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergent vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$ .

## 18 Applications linéaires

### 18.1 Définition

**Exercice 927 Notations :**

$\mathcal{C}$  : ensemble des fonctions numériques continues sur  $[0, 1]$ .

$\mathcal{C}_d$  : ensemble des fonctions numériques ayant une dérivée continue sur  $[0, 1]$ .

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  : définis de façon analogue pour les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{P}$  : ensemble des polynômes sur  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{P}_n$  : ensemble des polynômes sur  $\mathbb{R}$ , de degré  $\leq n$ .

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$ .
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$ .
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$ .
- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$ .
- $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} : f \mapsto \{t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\}$ .
- $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$ .



7.  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(1/4) - \int_{1/2}^1 f(t) dt$ .
8.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$ .
9.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$ .
10.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$ .
11.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$ .
12.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$ .
13.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  si  $x^2 + y^2 \neq 0$  et 0 sinon.
14.  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_d : f \mapsto \{x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t) dt\}$ .
15.  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_n : A \mapsto$  quotient de  $A$  par  $B$  à l'ordre  $n$  selon les puissances croissantes ( $B$  et  $n$  fixés, avec  $B(0) \neq 0$ ).
16.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : M \mapsto M'$  défini par :  $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$  si  $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$  et 0 sinon.
17.  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \vec{V}$  où  $\vec{V} = (4, -1, 1/2)$ .
18.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$ .
19.  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t \in [0,1]} f(t)$ .
20.  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \max_{t \in [0,1]} f(t) - \min_{t \in [0,1]} f(t)$ .
21.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$  la solution du système d'équations en  $(u, v)$  :
 
$$\begin{cases} 3u - v = x \\ 6u + 2v = y. \end{cases}$$
22.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto$  le symétrique de  $(x, y)$  par rapport à la droite d'équation  $x + y - a = 0$  (discuter selon les valeurs de  $a$ ).
23.  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto$  la projection de  $(x, y, z)$  sur le plan  $x + y + z - a = 0$  parallèlement à  $Oz$  (discuter selon les valeurs de  $a$ ).
24.  $\mathcal{C}_d \rightarrow \mathcal{C} : f \mapsto f'$ .
25.  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$ .
26.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_d : \lambda \mapsto$  la solution de l'équation différentielle  $y' - \frac{y}{x^2+1} = 0$  valant  $\lambda$  en  $x_0 = 1$ .
27.  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \ln(1 + |f(t)|) dt$ .
28.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto$  la 17-ième décimale de  $x$  (en écriture décimale).
29.  $\mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t) dt$ .
30.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(3^{x\sqrt{2}})$ .
31.  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : (\lambda, f) \mapsto$  la primitive de  $f$  qui vaut  $\lambda$  en  $x_0 = \pi$ .
32.  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f \mapsto \{x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x\}$ .

**Exercice 928** Soient  $f$  et  $g$ , applications de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , définies par  $f(z) = \bar{z}$  et  $g(z) = \Re(z)$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéaires sur  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{R}$ -e.v., et non linéaires sur  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{C}$ -e.v.

**Exercice 929** Déterminer si les applications  $f_i$  suivantes (de  $E_i$  dans  $F_i$ ) sont linéaires :

$$f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2, f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X], f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X].$$

**Exercice 930** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même telle que  $\varphi^n = 0$  et  $\varphi^{n-1} \neq 0$ . Soit  $x \in E$  tel que  $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$ . Montrer que la famille  $\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$  est une base de  $E$ .

[Exercice corrigé]

## 18.2 Image et noyau

**Exercice 931** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ , on définit l'application  $f : F \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 932** Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.

$$(1) \quad \mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$$

$$(2) \quad \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

$$(3) \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

**Exercice 933** Soient :  $E, F$  et  $G$  trois sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^N$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ . On rappelle que  $g \circ f$  est l'application de  $E$  dans  $G$  définie par  $g \circ f(v) = g(f(v))$ , pour tout vecteur  $v$  de  $E$ .

1. Montrer que  $g \circ f$  est une application linéaire.
2. Montrer que  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}g \cap \text{Im}f$ .

**Exercice 934**  $E_1$  et  $E_2$  étant deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel  $E$ , on définit l'application  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$  par  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
3. Appliquer le théorème du rang.

**Exercice 935** Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour  $p \leq n$  on note  $e_p$  le polynôme  $x \mapsto x^p$ . Soit  $f$  l'application définie sur  $E$  par  $f(P) = Q$  avec  $Q(x) = P(x+1) + P(x-1) - 2P(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .
2. Calculer  $f(e_p)$ ; quel est son degré? En déduire  $\ker f$ ,  $\text{Im} f$  et le rang de  $f$ .
3. Soit  $Q$  un polynôme de  $\text{Im} f$ ; montrer qu'il existe un polynôme unique  $P$  tel que :  $f(P) = Q$  et  $P(0) = P'(0) = 0$ .

**Exercice 936** Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels,  $f$  et  $g$  deux applications linéaires  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ ; montrer que :

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g \cap \text{Im} f) = f^{-1}(\ker g).$$

**Exercice 937** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $N$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $E$  vérifiant :  $f(E) = F$  et  $\ker f = N$ .

**Exercice 938** Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimensions respectives  $n, p, q$ ,  $f$  et  $g$  deux applications linéaires  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$  telles que  $g \circ f = 0$ . Quelle relation existe-t-il entre le rang de  $f$  et celui de  $g$  ?

**Exercice 939** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ ; montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes :

- (1)  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ ,
- (2)  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ ,
- (3)  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

**Exercice 940** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si  $e_1, e_2, \dots, e_p$  est libre, il en est de même de  $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ .
2. Si  $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$  est libre, il en est de même de  $e_1, e_2, \dots, e_p$ .
3. Si  $e_1, e_2, \dots, e_p$  est génératrice, il en est de même de  $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ .
4. Si  $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$  est génératrice, il en est de même de  $e_1, e_2, \dots, e_p$ .
5. Si  $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$  est une base de  $\mathfrak{S}u$ , alors  $e_1, e_2, \dots, e_p$  est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\text{Ker } u$ .

**Exercice 941** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . On suppose que  $\text{Ker } (\varphi) \cap \text{Im } (\varphi) = \{0\}$ . Montrer que, si  $x \notin \text{Ker } (\varphi)$  alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\varphi^n(x) \neq 0$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 942** Pour des applications linéaires  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ , établir l'équivalence

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

Soit  $f$  un endomorphisme d'un e.v.  $E$ , vérifiant l'identité  $f^2 + f - 2i_E = 0$ . Etablir  $\text{Im}(f - i_E) \subset \text{Ker}(f + 2i_E)$ ;  $\text{Im}(f + 2i_E) \subset \text{Ker}(f - i_E)$ ;  $E = \text{Ker}(f - i_E) \oplus \text{Ker}(f + 2i_E)$ .

**Exercice 943** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

1.  $\text{Ker}(f) = \text{im}(f)$ .
2.  $f^2 = 0$  et  $n = 2 \text{rg}(f)$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 944** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même.

1. Montrer que, si  $F \subset f(F)$  alors  $f(F) = F$ .
2. Montrer que, si  $f$  est injective et  $f(F) \subset F$  alors  $f(F) = F$ .

**Exercice 945** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires. Montrer que  $\text{ker}(f) \subset \text{ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(f)$ .

**Exercice 946** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même. Posons  $K_n = \text{Ker } (\varphi^n)$  et  $I_n = \text{Im } (\varphi^n)$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait  $K_n = K_{n_0}$ . Dédurre en que pour tout  $n \geq n_0$  on a également  $I_n = I_{n_0}$ .

**Exercice 947** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .

**Exercice 948** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^3 = f^2 + f$ . Montrer que  $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$  (on remarquera que  $f \circ (f^2 - f - id) = 0$ ).

**Exercice 949** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 950** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $E$  espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) \mid U \subset \text{Ker}(f)\}.$$

Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $L(E)$ .

**Exercice 951** Donner des exemples d'applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant :

1.  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .
2.  $\text{Ker}(f)$  inclus strictement dans  $\text{Im}(f)$ .
3.  $\text{Im}(f)$  inclus strictement dans  $\text{Ker}(f)$ .

**Exercice 952** Soit  $(u, v) \in (L(E))^2$ , tels que  $u^2 = u$  et  $vu = 0$ . Montrer que

$$\text{Im}(u + v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v).$$

### 18.3 Injectivité, surjectivité, isomorphie

**Exercice 953** Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\lambda$  un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Ecrire l'image du vecteur  $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ . Comment choisir  $\lambda$  pour que  $\phi$  soit injective ? surjective ?

**Exercice 954** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  une base de  $E$ , et  $\lambda$  un paramètre réel.

Démontrer que la donnée de  $\begin{cases} \varphi(e_1) &= e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) &= e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) &= e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$  définit une application linéaire  $\varphi$  de  $E$

dans  $E$ . Écrire le transformé du vecteur  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ . Comment choisir  $\lambda$  pour que  $\varphi$  soit injective ? surjective ?

**Exercice 955**  $E$  étant un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ , construire dans les trois cas suivants deux applications linéaires bijectives  $u$  et  $v$  de  $E$  dans  $E$  telles que  $f = u - v$ .

- $f$  est bijective.
- $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$ .
- $f$  est quelconque.

**Exercice 956**

1. Dire si les applications  $f_i, 1 \leq i \leq 6$ , sont linéaires

$$\begin{aligned} f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 &\mapsto (2x + y, ax - y) \in \mathbb{R}^2, \\ f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, ax, y) \in \mathbb{R}^3, \\ f_3 : P \in \mathbb{R}[X] &\mapsto aP' + P \in \mathbb{R}[X], \\ f_4 : P \in \mathbb{R}_3[X] &\mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X], \\ f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] &\mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3, \\ f_6 : P \in \mathbb{R}[X] &\mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

2. Pour les applications linéaires trouvées ci-dessus, déterminer  $\ker(f_i)$  et  $\text{Im}(f_i)$ , en déduire si  $f_i$  est injective, surjective, bijective.

**Exercice 957** Soit  $f \in L(E)$  non nul ; montrer que  $f$  est injective si et seulement si pour tout couple  $(E_1, E_2)$  de sous-espaces supplémentaires de  $E$ , la somme  $f(E_1) + f(E_2)$  est directe (i.e.  $f(E_1)$  et  $f(E_2)$  sont supplémentaires).

**Exercice 958** Soit  $f \in L(E)$  où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \mu \in K, f = \mu \text{id}.$$

**Exercice 959** Soient  $E = \mathbb{C}_n[X]$  et  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients complexes de degré  $(n+1)$ . On considère l'application  $f$  qui à tout polynôme  $P$  de  $E$ , associe les reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est bijective} \iff A \text{ et } B \text{ sont premiers entre eux.}$$

**Exercice 960** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^3 = f^2 + f + \text{id}$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme.

**Exercice 961** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme.
2. Montrer que  $E = \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker(f - 2\text{Id})$ .
3. Déduire de 2. que si  $E$  est de dimension finie  $n$ , il existe une base  $\beta = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ , telle que  $\forall i, f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$  avec  $\lambda_i = 1$  ou  $\lambda_i = 2$ .

**Exercice 962** Montrer que si  $p < q$  il n'existe pas d'application linéaire surjective de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ . Montrer que si  $q < p$  il n'existe pas non plus d'application linéaire injective de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ .

**Exercice 963** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si l'image par  $\varphi$  de toute base de  $E$  est une base de  $F$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 964**

1. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $\varphi$  une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$ . Montrer que la bijection réciproque  $\varphi^{-1}$  est linéaire. Une telle application est dite un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $E$  à valeurs dans  $F$  si et seulement si  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Exercice 965** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $\varphi$  et  $\psi$  deux applications linéaires de  $E$  dans lui-même telles que  $\varphi \circ \psi = \text{id}_E$ . Montrer que  $\psi \circ \varphi = \text{id}_E$ .

## 18.4 Morphismes particuliers

**Exercice 966** Soient  $U$  et  $V$  deux ensembles non vides et  $f$  une application de  $U$  à valeurs dans  $V$ . Le *graphe* de  $f$  est le sous-ensemble de  $U \times V$  défini par  $\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in U \times V \text{ tels que } y = f(x)\}$ .

1. On suppose maintenant que  $U$  et  $V$  sont des espaces vectoriels. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel de  $U \times V$ .
2. Montrer qu'une partie  $H$  de  $U \times V$  est le graphe d'une application linéaire de  $U$  dans  $V$  si et seulement si les trois conditions qui suivent sont satisfaites :
  - i) La projection canonique  $H \rightarrow U$  définie par  $(x, y) \mapsto x$  est surjective.
  - ii)  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $U \times V$ .
  - iii)  $H \cap (\{0_U\} \times V) = \{0_{U \times V}\}$ . ( $0_U$  et  $0_{U \times V}$  sont les éléments neutres respectifs de  $U$  et  $U \times V$ .)
3. On identifie  $\mathbb{R}^4$  à  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  par l'isomorphisme  $(x, y, z, t) \mapsto ((x, y), (z, t))$ . Énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $E$  soit le graphe d'une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même.
4. Montrer que  $E$  est le graphe d'une application linéaire  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même. Déterminer sa matrice dans une base que l'on définira au préalable.

**Exercice 967 (Projecteur et involution)** Soit  $E$  un espace vectoriel ; on note  $i_E$  l'identité sur  $E$ . Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est un **projecteur** si  $u \circ u = u$ .

1. Montrer que si  $u$  est un projecteur alors  $i_E - u$  est un projecteur. Vérifier aussi que  $\text{Im}u = \{x \in E; u(x) = x\}$  et que  $E = \text{Ker}u \oplus \text{Im}u$ .  
Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est appelé *involutif* si  $u \circ u = i_E$ .
2. Montrer que si  $u$  est involutif alors  $u$  est bijectif et  $E = \text{Im}(i_E + u) \oplus \text{Im}(i_E - u)$ .  
Soit  $E = F \oplus G$  et soit  $x \in E$  qui s'écrit donc de façon unique  $x = f + g$ ,  $f \in F$ ,  $g \in G$ .  
Soit  $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$ .
3. Montrer que  $u$  est involutif,  $F = \{x \in E; u(x) = x\}$  et  $G = \{x \in E; u(x) = -x\}$ .
4. Montrer que si  $u$  est un projecteur,  $2u - i_E$  est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

**Exercice 968** Soient  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$  et  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$ . On désigne par  $\varepsilon$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Donner une base  $\{e_1, e_2\}$  de  $P$  et  $\{e_3\}$  une base de  $D$ . Montrer que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$  puis que  $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $p$  la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ . Déterminer  $\text{Mat}(p, \varepsilon', \varepsilon')$  puis  $A = \text{Mat}(p, \varepsilon, \varepsilon)$ . Vérifier  $A^2 = A$ .
3. Soit  $s$  la symétrie de  $\mathbb{R}^3$  par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ . Déterminer  $\text{Mat}(s, \varepsilon', \varepsilon')$  puis  $B = \text{Mat}(s, \varepsilon, \varepsilon)$ . Vérifier  $B^2 = I$ ,  $AB = A$  et  $BA = A$ .

**Exercice 969**

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Un *hyperplan* de  $E$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$ . Montrer que l'intersection de deux hyperplans de  $E$  a une dimension supérieure ou égale à  $n - 2$ . Montrer que, pour tout  $p \leq n$ , l'intersection de  $p$  hyperplans a une dimension supérieure ou égale à  $n - p$ .
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , l'application  $e_y$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie en posant  $e_y(P(X)) = P(y)$  (i.e. l'application  $e_y$  est l'évaluation en  $y$ ) est linéaire. Calculer la dimension de son noyau.
3. Même question avec l'application  $e'_y$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie en posant  $e'_y(P(X)) = P'(y)$  (en désignant par  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ ).
4. Démontrer, à l'aide de ces deux résultats, qu'il existe dans  $\mathbb{R}_6[X]$  un polynôme  $P$  non nul et ayant les propriétés suivantes :  $P(0) = P(1) = P(2) = 0$  et  $P'(4) = P'(5) = P'(6) = 0$ .

**Exercice 970** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{3}(-x + 2y, -2x + 4y) \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est la biîîp par rapport à biîîp parallèlement à biîîp.

**Exercice 971**  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$  :  $E = F \oplus G$ . On pose  $s(u) = u_F - u_G$  où  $u = u_F + u_G$  est la décomposition (unique) obtenue grâce à  $E = F \oplus G$ .  $s$  est la symétrie par-rapport à  $F$  de direction  $G$ .

1. Montrer que  $s \in L(E)$ , que  $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$ , donner  $\text{Ker}(s)$  et calculer  $s^2$ .
2. Réciproquement si  $f \in L(E)$  vérifie  $f^2 = id_E$ . On pose  $p = \frac{f+id_E}{2}$ . Calculer  $f(u)$  en fonction de  $p(u)$  et  $u$ . Vérifier que  $p$  est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que  $f$  est la symétrie par rapport à  $F = \{u \in E | f(u) = u\}$  de direction  $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$ .

**Exercice 972** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ , espace vectoriel, tels que  $pq = qp$  ( $p$  et  $q$  commutent). Montrer que  $pq$  et  $(p + q - pq)$  sont deux projecteurs de  $E$ , et que :

$$\text{Im}(pq) = \text{Im } p \cap \text{Im } q,$$

$$\text{Im}(p + q - pq) = \text{Im } p + \text{Im } q.$$

**Exercice 973** Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs de  $E$ , espace vectoriel; donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $p + q$  soit un projecteur de  $E$ ; donner alors  $\text{Im}(p + q)$  et  $\text{Ker}(p + q)$ .

*Indication* : on montrera que  $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$  et que  $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .

**Exercice 974** Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $P$  le sous-espace des fonctions paires et  $I$  le sous-espace des fonctions impaires. Montrer que  $E = P \oplus I$ . Donner l'expression du projecteur sur  $P$  de direction  $I$ .

**Exercice 975** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes, et  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$\forall P \in E, f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que  $f \in L(E)$ , que  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker}(f)$  mais que  $f^2 = -f$ . Quel théorème cet exemple illustre-t-il ?

**Exercice 976** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ , et  $f : E \rightarrow E$  définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que  $f \in L(E)$ , donner une base de  $\text{Im } f$  et de  $\text{Ker}(f)$ .

**Exercice 977** Soit  $E = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  et  $U : E \rightarrow E$  définie par  $f \mapsto U(f)$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, U(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

et  $U(f)(0) = f(0)$ . Montrer que  $U \in L(E)$ , déterminer  $\text{Ker}(U)$  et  $\text{Im}(U)$ .

**Exercice 978** On désigne par  $\mathcal{P}_q$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $q$ , et  $\mathcal{O}_q$  l'espace vectoriel des polynômes d'ordre supérieur ou égal à  $q$ , c'est-à-dire divisibles par  $x^q$ .  $P$  étant un polynôme, on note  $T(P)$  le polynôme défini par :

$$T(P)(x) = xP(0) - \frac{1}{20}x^5P^{(4)}(0) + \int_0^x t^2[P(t+1) - P(t) - P'(t)] dt.$$

1. Montrer que  $T$  est linéaire. Déterminer  $T(e_i)$  où  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = x$ ,  $e_2 = x^2$ ,  $e_3 = x^3$ ,  $e_4 = x^4$ , et vérifier que  $T(\mathcal{P}_4) \subset \mathcal{P}_4$ . Désormais, on considère  $T$  comme application linéaire de  $\mathcal{P}_4$  dans  $\mathcal{P}_4$ . Écrire sa matrice par rapport à la base  $(e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ .
2. Déterminer soigneusement les espaces  $T(\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_3)$  et  $T(\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_2)$ .
3. La restriction  $T'$  de  $T$  à  $\mathcal{P}_4 \cap \mathcal{O}_2$  est-elle injective? Sinon déterminer une base du noyau de  $T'$ .
4. Montrer que  $\mathfrak{S}T = (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{P}_1) \oplus (\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4)$ . Quel est le rang de  $T$ ?
5. Montrer que  $\text{Ker} T$  peut s'écrire sous la forme  $(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{P}_1) \oplus V$ ; expliciter un sous-espace  $V$  possible. Déterminer  $\text{Ker} T \cap \mathfrak{S}T$ .
6. On cherche un vecteur non nul  $u = ae_3 + be_4$  de  $\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4$ , et un nombre réel  $\lambda$ , tels que  $T(u) = \lambda u$ . Écrire les équations que doivent vérifier  $a, b, \lambda$ . Montrer qu'il existe deux valeurs possibles de  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , telles  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ; les calculer. Trouver deux vecteurs non nuls  $u_3$  et  $u_4$  de  $\mathcal{O}_3 \cap \mathcal{P}_4$  tels que  $T(u_3) = \lambda_1 u_3$  et  $T(u_4) = \lambda_2 u_4$ .
7. On pose  $u_0 = e_1$ ,  $u_1 = e_2 - 4e_3 + 3e_4$ ,  $u_2 = e_0$ . Montrer que  $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$  est une base de  $\mathcal{P}_4$ . Écrire la matrice de  $T$  dans cette base.

## 19 Espaces vectoriels de dimension finie

### 19.1 Base

**Exercice 979** Montrer que les vecteurs  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans cette base.

[Exercice corrigé]

**Exercice 980** Soient  $\vec{v}_1(1, 2, 3, 4)$ ,  $\vec{v}_2(2, 2, 2, 6)$ ,  $\vec{v}_3(0, 2, 4, 4)$ ,  $\vec{v}_4(1, 0, -1, 2)$ ,  $\vec{v}_5(2, 3, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$ . Soient  $F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  et  $G = \text{Vect}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ . Déterminer une base des sous-espaces  $F \cap G$ ,  $F$ ,  $G$  et  $F + G$ .

**Exercice 981** 1. Montrer que les vecteurs  $x_1 = (0, 1, 1)$ ,  $x_2 = (1, 0, 1)$  et  $x_3 = (1, 1, 0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Trouver dans cette base les composantes du vecteur  $x = (1, 1, 1)$ .

2. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.



**Exercice 982** On considère dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $F = \text{lin}\{a, b, c\}$  et  $G = \text{lin}\{d, e\}$ , avec  $a = (1, 2, 3, 4)$ ,  $b = (2, 2, 2, 6)$ ,  $c = (0, 2, 4, 4)$ ,  $d = (1, 0, -1, 2)$  et  $e = (2, 3, 0, 1)$ . Déterminer des bases des sous-espaces  $F \cap G$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $F + G$ .

**Exercice 983** Dans l'espace  $\mathcal{P}_5$  des polynômes de degré  $\leq 5$ , on définit les sous-ensembles :

$$E_1 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P(0) = 0\}$$

$$E_2 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid P'(1) = 0\}$$

$$E_3 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x^2 + 1 \text{ divise } P\}$$

$$E_4 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid x \mapsto P(x) \text{ est une fonction paire}\}$$

$$E_5 = \{P \in \mathcal{P}_5 \mid \forall x, P(x) = xP'(x)\}.$$

1. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_3, E_1 \cap E_2 \cap E_3, E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$ .
2. Déterminer dans  $\mathcal{P}_5$  des sous-espaces supplémentaires de  $E_4$  et de  $E_1 \cap E_3$ .

**Exercice 984** Dans  $\mathbb{R}^4$  on considère l'ensemble  $E$  des vecteurs  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  vérifiant l'équation  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . L'ensemble  $E$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ ? Si oui, en donner une base.

**Exercice 985** Vrai ou faux? On désigne par  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs  $x, y, z$  sont deux à deux non colinéaires, alors la famille  $x, y, z$  est libre.
2. Soit  $x_1, x_2, \dots, x_p$  une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

**Exercice 986** Étudier l'indépendance linéaire des listes de vecteurs suivantes, et trouver à chaque fois une base du sous-espace engendré.

1.  $(1, 0, 1), (0, 2, 2), (3, 7, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $(1, 2, 1, 2, 1), (2, 1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .
4.  $(2, 4, 3, -1, -2, 1), (1, 1, 2, 1, 3, 1), (0, -1, 0, 3, 6, 2)$  dans  $\mathbb{R}^6$ .
5.  $(2, 1, 3, -1, 4, -1), (-1, 1, -2, 2, -3, 3), (1, 5, 0, 4, -1, 7)$  dans  $\mathbb{R}^6$ .

**Exercice 987** Dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs suivants forment-ils une base? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1.  $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$ .
2.  $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$ .
3.  $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$ .

**Exercice 988** Dans  $\mathbb{R}^3$ , comparer les sous-espaces  $F$  et  $G$  suivants :

$$F = \text{lin}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\} \text{ et } G = \text{lin}\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}.$$

**Exercice 989** Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère les familles de vecteurs suivantes

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (1, 0, -2, 3), v_4 = (2, 1, 0, -1), v_5 = (4, 3, 2, 1).$$

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (3, 4, 5, 16).$$

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (2, 1, 0, 11), v_4 = (3, 4, 5, 14).$$

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre? Si oui, la compléter pour obtenir une base de  $\mathbb{R}^4$ . Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

**Exercice 990** Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ , montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 991** On désigne par  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soient  $D_1, D_2, D_3$  des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  distinctes deux à deux. Alors  $\mathbb{R}^3$  est somme de  $D_1, D_2, D_3$ .
2. Soient  $F$  et  $G$  des hyperplans vectoriels de  $E$ . Alors  $E \neq F \cup G$ .
3. Soient  $P_1$  et  $P_2$  des plans vectoriels de  $E$  tels que  $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ . Alors  $\dim E \geq 4$ .
4. Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces de dimension 3 de  $\mathbb{R}^5$ . Alors  $F \cap G \neq \{0\}$ .
5. Soit  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $F = \text{lin}\{e_1, e_3\}$ . Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  contient  $e_2$ .

**Exercice 992** 1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme  $F = 3X - X^2 + 8X^3$  sous la forme  $F = a + b(1 - X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$  (calculer  $a, b, c, d$  réels), et aussi sous la forme  $F = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$  (calculer  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  réels).

2. Soit  $\mathcal{P}_3$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$ . Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de  $\mathcal{P}_3$  :  $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$ ,  $B_2 = \{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$ ,  $B_3 = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$ .

**Exercice 993** Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{P}_2$  des polynômes de degré  $\leq 2$ , on considère les polynômes  $P_1 = X^2 + X(1 - X) + (1 - X)^2$ ,  $P_2 = X^2 + (1 - X)^2$ ,  $P_3 = X^2 + 1 + (1 - X)^2$ ,  $P_4 = X(1 - X)$ . Peut-on extraire de  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  des bases de  $\mathcal{P}_2$  ? Si oui, les trouver toutes.

**Exercice 994** Soit  $E$  l'ensemble des fractions rationnelles  $F$  qui peuvent s'écrire

$$F = \frac{P}{(X-1)^3(X^2+1)^2}, \quad P \text{ polynôme de degré } \leq 6.$$

Les fractions  $\frac{1}{(X-1)}$ ,  $\frac{1}{(X-1)^2}$ ,  $\frac{1}{(X-1)^3}$ ,  $\frac{1}{X^2+1}$ ,  $\frac{X}{X^2+1}$ ,  $\frac{1}{(X^2+1)^2}$ ,  $\frac{X}{(X^2+1)^2}$  forment-elles une base de  $E$  ? Que se passe-t-il si on suppose que  $P$  décrit l'ensemble des polynômes de degré  $\leq 9$  ?

**Exercice 995** Problème de l'interpolation : soit les cinq points  $(x_1, y_1) = (-2, 3)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, -2)$ ,  $(x_3, y_3) = (1, 5)$ ,  $(x_4, y_4) = (5, 1)$ ,  $(x_5, y_5) = (6, 7)$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{P}_4$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 4$ . On veut trouver un polynôme  $F$  dans  $\mathcal{P}_4$  tel que pour  $i = 1, \dots, 5$  on ait  $F(x_i) = y_i$ .

1. Sans effectuer les calculs, indiquer comment on pourrait calculer  $a, b, c, d, e$  exprimant  $F = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$  selon la base  $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$  de  $\mathcal{P}_4$ .
2. Montrer que  $\{1, X + 2, (X + 2)X, (X + 2)X(X - 1), (X + 2)X(X - 1)(X - 5)\}$  est une base de  $\mathcal{P}_4$ . Calculer directement (indépendamment de la question précédente) les coordonnées de  $F$  dans cette base.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes  $X(X - 1)(X - 5)(X - 6)$ ,  $(X + 2)(X - 1)(X - 5)(X - 6)$ ,  $(X + 2)X(X - 5)(X - 6)$ ,  $(X + 2)X(X - 1)(X - 6)$ ,  $(X + 2)X(X - 1)(X - 5)$  forment une base de  $\mathcal{P}_4$ . Calculer directement (indépendamment des questions précédentes) les coordonnées de  $F$  dans cette base.
4. Dans laquelle des diverses bases ci-dessus le calcul de  $F$  vous paraît-il le plus simple ?

**Exercice 996** Déterminer pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

forment une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 997** Soit  $(\Sigma)$  le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de  $(\Sigma)$  forme un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer la dimension et une base de  $F$ .

**Exercice 998** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On pose, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $A_p(X) = (X - a)^p$  et  $B_p(X) = X^p$ .

1. Montrer que  $\varepsilon = \{A_0, \dots, A_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que  $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$ . (On pourra montrer que l'ensemble  $E$  des éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  et contient une base.)

**Exercice 999** On munit  $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  de la loi interne "addition"  $+$  :  $(a, b) + (a', b') = (aa', b + b')$ , et de la loi externe  $\cdot$  à coefficients réels :  $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \forall (a, b) \in E \lambda \cdot (a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$ .

1. Vérifier que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v.

2. Les systèmes suivants sont-ils libres ou liés :  $((1,0), (1,1))$  ?  $((2,1), (8,3))$  ?  $((2,1), (6,3))$  ?

3. Vérifier que le système  $b = ((2,0), (2,1))$  est une base de  $E$  et déterminer les composantes du vecteur  $v = (x, y) \in E$  par rapport à la base  $b$ .

**Exercice 1000** Pour  $k = 2, 3, 4$  montrer que  $V_k$  est un s.e.v. de  $\mathbb{C}^k$ , et en donner une base :

$$V_2 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 / a + ib = 0\}, V_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 / a + 2b + 3c = 0\},$$

$$V_4 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 / a + ib = b + ic = c + id\}.$$

**Exercice 1001** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré  $\leq n$ .

1. Soit  $\beta = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  un système de  $(n + 1)$  polynômes tels que,  $\forall k, 0 \leq k \leq n$ ,  $\deg P_k = k$ . Montrer que  $\beta$  est une base de  $E$ .

2. Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Montrer que :  $\gamma = (P, P', \dots, P^{(n)})$  est une base de  $E$  et déterminer les composantes du polynôme  $Q$  défini par :  $Q(X) = P(X + a)$ , ( $a$  réel fixé), dans la base  $\gamma$ .

3. Démontrer que le système  $S = (X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $E$ , et déterminer, pour tout  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ , les composantes du polynôme  $X^p$  dans la base  $S$ .

**Exercice 1002** Soient  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (7, 2, 0, -1)$  et  $\mathbf{v}_5 = (-2, -3, 1, 0)$ . Donner une base du sous-espace vectoriel  $F = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \rangle$ . Déterminer un supplémentaire de  $G$  dans  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 1003** Soient le triplet  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (1, 5, 8, 1)$  et le triplet  $\mathbf{w}_1 = (0, 3, 5, 1)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 3, 1)$ . On considère les sous-espaces vectoriels  $F = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$  et  $G = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ . Donner une base des sous-espaces suivants  $F, G, F \cap G$  et  $F + G$ .

**Exercice 1004** Soit

$$E = \{f_{\alpha, A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); (\alpha, A) \in \mathbb{R}^2, f_{\alpha, A}(x) = A \cos(x + \alpha)\}.$$

Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et en donner une base.

**Exercice 1005** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 2), \mathbf{e}_3 = (1, 2, 3)\}$$

1. Montrer que  $S$  est une base de  $E$ .
2. Calculer les coordonnées de  $\mathbf{v} = (5, 7, 12)$  dans cette base.

**Exercice 1006**

1. Montrer que les vecteurs  $\mathbf{w}_1 = (1, -1, i)$ ,  $\mathbf{w}_2 = (-1, i, 1)$ ,  $\mathbf{w}_3 = (i, 1, -1)$  forment une base de  $\mathbb{C}^3$ .
2. Calculer les composantes de  $\mathbf{w} = (1 + i, 1 - i, i)$  dans cette base.

**Exercice 1007**

1. Montrer que le système  $\mathbf{s}_1 = (1, \sqrt{2})$  et  $\mathbf{s}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$  sont libres dans  $\mathbb{R}$  considéré comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ .
2. Soient dans  $\mathbb{R}^2$ , les vecteurs  $\mathbf{u}_1 = (3 + \sqrt{5}, 2 + 3\sqrt{5})$  et  $\mathbf{u}_2 = (4, 7\sqrt{5} - 9)$ . Montrer que le système  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  est  $\mathbb{Q}$ -libre et  $\mathbb{R}$ -lié.
3. Soient dans  $\mathbb{C}^2$ , les vecteurs  $\mathbf{r}_1 = (1 + i, 1 - 2i)$  et  $\mathbf{r}_2 = (3i - 1, 5)$ . Montrer que le système  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est  $\mathbb{R}$ -libre et  $\mathbb{C}$ -lié.

**Exercice 1008** Déterminer pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  les polynômes  $X^2 + t/2$ ,  $X - t$ ,  $(X + t + 1)^2$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 1009** Etudier la liberté des familles

1.  $(1, 1), (1, 2)$ .
2.  $(2, 3), (-6, 9)$ .
3.  $(1, 3, 1), (1, 3, 0), (0, 3, 1)$ .
4.  $(1, 3), (-1, -2), (0, 1)$ .

**Exercice 1010** Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1.  $(1, 1), (3, 1)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $(1, 0, 2), (1, 2, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1011** On considère dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Pi = \text{vect}\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$  et  $D = \text{vect}\{(0, 1, -1)\}$ . Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$ .

**Exercice 1012** Déterminer une base de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .

**Exercice 1013** Déterminer une base de  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0, x - y + z = 0\}$ .

## 19.2 Dimension

**Exercice 1014** Calculer la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par les vecteurs  $V_1 = (0, 1, 2, 3)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$  et  $V_3 = (2, 3, 4, 5)$ .

**Exercice 1015** Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ , montrer que :  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ .

**Exercice 1016** Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

**Exercice 1017** Soient  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$  définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = 2X(X-2), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer 1,  $X$ ,  $X^2$  en fonction de  $P_0, P_1$  et  $P_2$ . On note  $F = \text{Vect}\{P_0, P_1\}$  et  $G = \text{Vect}\{P_2, P_3\}$ . Calculer  $\dim F$ ,  $\dim G$ ,  $\dim(F+G)$  et  $\dim(F \cap G)$ . Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

**Exercice 1018** Donner la dimension du sous-espace  $F$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par  $f_1(x) = \sin^2 x$ ,  $f_2(x) = \cos^2 x$ ,  $f_3(x) = \sin 2x$  et  $f_4(x) = \cos 2x$ .

**Exercice 1019** On considère, dans  $\mathbb{R}^4$ , les vecteurs :  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soient  $E$  l'espace vectoriel engendré par  $e_1, e_2, e_3$  et  $F$  celui engendré par  $e_4, e_5$ . Calculer les dimensions respectives de  $E, F, E \cap F, E + F$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1020** Soient  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t\}$ . Déterminer  $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$ .

**Exercice 1021** Montrer que  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (z, x-y, y+z) \end{cases}$  est un automorphisme.

**Exercice 1022** Soit  $E$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) / \text{Im} f = \ker f$$

**Exercice 1023** Montrer qu'il existe une unique forme linéaire  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f(1, 2) = 2$  et  $f(-2, 1) = 5$ . Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 1024** Déterminer suivant la valeur de  $x \in \mathbb{R}$  le rang de la famille de vecteurs  $e_1 = (1, x, -1)$ ,  $e_2 = (x, 1, x)$ ,  $e_3 = (-1, x, 1)$ .

**Exercice 1025** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ . Soit  $x_0 \in E / f^2(x_0) \neq 0$ .

1. Montrer que  $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$  est une base.
2. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de base  $(id, f, f^2)$ .

**Exercice 1026** Soit  $E$  de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence des trois propriétés :

- (i)  $\ker f = \ker f^2$ .
- (ii)  $\text{Im} f = \text{Im} f^2$ .

(iii)  $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ .

**Exercice 1027** Soient  $E$  et  $F$  de dimensions finies et  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que  $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ .
2. En déduire que  $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v)$ .

**Exercice 1028** Soit  $(f, g) \in (L(E))^2$  où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , montrer les inégalités :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \inf(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$$

(on pourra utiliser  $g|_{\ker(f \circ g)} = h$  dont on déterminera le noyau)

**Exercice 1029** Soit  $(f, g) \in (L(E))^2$  où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , tel que  $(f + g)$  est inversible et  $fg = 0$ . Montrer que :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n.$$

**Exercice 1030** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $E$  espace vectoriel, et

$$A = \{f \in L(E) \mid U \subset \operatorname{Ker}(f)\}.$$

Montrer que  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $L(E)$ . Si  $E$  est de dimension finie, quelle est la dimension de  $A$  ?

**Exercice 1031** Soient  $E_0, E_1, \dots, E_n$   $n + 1$  espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $K$ , de dimensions respectives  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . On suppose qu'il existe  $n$  applications linéaires  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  telles que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n - 1\}, f_k \in L(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

- $f_0$  est injective ;
- $\forall j \in \{1, \dots, n - 1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker}(f_j)$ ;
- $f_{n-1}$  est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j = 0.$$

**Exercice 1032** Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans de  $E$ , espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2.$$

Généraliser.

**Exercice 1033** Donner un exemple d'endomorphisme d'un espace vectoriel injectif et non surjectif, puis d'un endomorphisme surjectif et non injectif.

**Exercice 1034** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in L(E)$ , montrer l'équivalence :

$$E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Donner un contre-exemple quand  $\dim E = +\infty$ .

**Exercice 1035** Soit  $(f, g) \in L(E, F)^2$  avec  $E, F$  de dimension finie. On suppose

$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im} f;$$

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}.$$

**Exercice 1036** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $(f, g) \in L(E)^2$  avec  $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$ . Montrer que ces sommes sont directes.

**Exercice 1037** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $(f_1, \dots, f_k)$  des projecteurs de  $E$ . Montrer l'équivalence :

$$[\forall (i, j) \in \{1, \dots, k\}^2, i \neq j \Rightarrow f_i f_j = 0] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k f_i \text{ est un projecteur.}$$

**Exercice 1038** Soit  $f \in L(E)$  où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , tel que :

$$f^2 = -Id.$$

1. Montrer que  $f$  est inversible et que la dimension de  $E$  est paire, donc  $n = 2p$ .
2. Soit  $x \neq 0$ , montrer que  $x$  et  $f(x)$  sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de  $E$ .
3. Montrer qu'il existe  $p$  sous-espaces de dimension deux stables par  $f$ ,  $E_1 \dots E_p$  tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i. \text{ En déduire une "bonne" formule de calcul de } f.$$

**Exercice 1039** Soit  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $f \in L(E)$  nilpotente. On note  $q \in \mathbb{N}^*$  l'indice de nilpotence de  $f$ , i.e. :

$$q = \inf\{j \in \mathbb{N}^* | f^j = 0\}.$$

1. Montrer que :  $\exists x_0 \in E$  tel que  $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\}$  soit libre. En déduire  $q \leq n$ .
2. Soit  $r = \dim \operatorname{Ker}(f)$ . Montrer que  $r > 0$  et que

$$\frac{n}{r} \leq q \leq n + 1 - r.$$

## 20 Matrices

### 20.1 Découverte

**Exercice 1040** Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

**Exercice 1041** On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $M^2, M^3, M^4, M^5$ .

**Exercice 1042** On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $AB$  puis  $(AB)C$ .
2. Calculer  $BC$  puis  $A(BC)$ .
3. Que remarque-t-on ?

**Exercice 1043** On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $AB$ .
2. Calculer  $BA$ .
3. Que remarque-t-on ?

**Exercice 1044** Trouver les matrices qui commutent avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . De même avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1045** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_3$ , où  $I_3$  est la matrice identité  $3 \times 3$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 1046** 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et soit  $B = A - I_3$ .

- (a) Calculer  $B^2, B^3$  en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour  $B^n$ , pour tout entier  $n$ .
- (b) Développer  $(B + I_3)^n$  par la formule du binôme et simplifier.
- (c) En déduire  $A^n$  Pour tout entier  $n$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour tout entier  $n$ , calculer  $A^n$  en utilisant  $A - I_4$ .

**Exercice 1047** 1. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Soient  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que  $AB = AC$ , a-t-on  $A = C$ ?  $A$  peut-elle être inversible ?



(b) Déterminer toutes les matrices  $F$  telles que  $A \times F = O$  ( $O$  étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices  $B$  telles que  $BA = I_2$ .

3. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées  $n \times n$  telles que  $AB = A + I_n$ .

Montrer que  $A$  est inversible et déterminer son inverse (en fonction de  $B$ ).

**Exercice 1048** Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 1049** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ ; on suppose que  $A^2$  est une combinaison linéaire de  $A$  et  $I_n$  :  $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ .

1. Montrer que  $A^n$  est également une combinaison linéaire de  $A$  et  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Montrer que si  $\beta$  est non nul, alors  $A$  est inversible et que  $A^{-1}$  est encore combinaison linéaire de  $A$  et  $I_n$ .
3. Application 1 : soit  $A = J_n - I_n$ , où  $J_n$  est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec  $n \geq 1$ . Montrer que  $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$ ; en déduire que  $A$  est inversible, et déterminer son inverse.
4. Application 2 : montrer que si  $n = 2$ ,  $A^2$  est toujours une combinaison linéaire de  $A$  et  $I_2$ , et retrouver la formule donnant  $A^{-1}$  en utilisant 2.

**Exercice 1050** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$  et montrer que  $A^2 = 2I - A$ , en déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

## 20.2 Généralités

**Exercice 1051** Rappeler la structure d'espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ . Déterminer une base de  $M_n(\mathbb{R})$ . Donner sa dimension.

**Exercice 1052** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1053** Déterminer deux éléments  $A$  et  $B$  de  $M_2(\mathbb{R})$  tels que :  $AB = 0$  et  $BA \neq 0$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1054** Soit  $E$  le sous ensemble de  $M_3(\mathbb{R})$  défini par  $E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$  stable pour la multiplication des matrices. Calculer  $\dim(E)$ .
2. Soit  $M(a, b, c)$  un élément de  $E$ . Déterminer, suivant les valeurs des paramètres  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  son rang. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse  $M(a, b, c)^{-1}$  de  $M(a, b, c)$ .
3. Donner une base de  $E$  formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

**Exercice 1055** Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . On nomme commutant de  $A$  et on note  $C(A)$  l'ensemble des  $B \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ .

1. Montrer que  $C(A)$  est un sous espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k \in C(A)$ .

**Exercice 1056** Soit  $F$  et  $G$  les sous-ensembles de  $M_3(\mathbb{R})$  définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+d & a & c \\ 0 & b+d & 0 \\ a+c+d & 0 & a+c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que ce sont des sous espaces vectoriels de  $M_3(\mathbb{R})$  dont on déterminera des bases.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1057** Montrer que  $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}); \operatorname{tr}(M) = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ . Déterminer une base de  $F$  et la compléter en une base de  $M_2(\mathbb{R})$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1058** Soient  $A$  et  $B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices triangulaires supérieures.

1. Montrer (en calculant les coefficients) que  $AB$  est triangulaire supérieure.
2. Soit  $\varphi$  un endomorphisme bijectif de  $\mathbb{K}^n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  tel que  $\varphi(F) \subset F$ . Montrer que  $\varphi^{-1}(F) \subset F$ .
3. En déduire une nouvelle démonstration de 1. Montrer que si  $A$  est inversible,  $A^{-1}$  est triangulaire supérieure.

**Exercice 1059** Soit  $N \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente. Calculer  $\det(I + N)$ . Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$  commute avec  $N$ , montrer que  $\det(A + N) = \det(A)$ . (on pourra commencer par étudier le cas où  $A$  est inversible.)

**Exercice 1060** Soit  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ . Montrer que  $G$  est un groupe multiplicatif.

**Exercice 1061** Soit  $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $A^n(\theta)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 1062** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^3 - 3A^2 + 2A$ .
2. Quel est le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^3 - 3X^2 + 2X$  ?
3. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $A$  est-elle inversible ?

**Exercice 1063** Soient  $A$  et  $B \in M_n(\mathbb{Q})$  telles que  $\forall X \in M_n(\mathbb{Q}) \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$ . Montrer que  $A = B$ .

**Exercice 1064** Que peut-on dire d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\text{tr}(A^t A) = 0$ ?

**Exercice 1065** Discuter suivant les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1066** Calculer l'inverse de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1067** Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

**Exercice 1068** Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M - I_n$  soit nilpotente (ie  $\exists k \in \mathbb{N}, (M - I_n)^k = 0$ ). Montrer que  $M$  est inversible.

**Exercice 1069**  $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que  $M$  est inversible.

**Exercice 1070** Montrer que si  $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$  et  $AB = A + B$  alors  $AB = BA$ .

**Exercice 1071** Soit  $M = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ , montrer :

$$\min_j \max_i a_{i,j} \geq \max_i \min_j a_{i,j}.$$

**Exercice 1072** Soit  $J \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que :  $J^2 = I$  et

$$E = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2; A = aI + bJ\}.$$

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel stable par multiplication (Est-ce une algèbre ?). En déduire que :

$$\forall A \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2; A^n = a_n I + b_n J$$

et calculer les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ .

2. Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ . Calculer  $(u_n, v_n)$  tel que  $S_n = u_n I + v_n J$  en fonction de  $a$  et de  $b$ . Calculer les limites de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On pose  $e^A = uI + vJ$  où  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ,  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ . Calculer  $e^{-A}$  et le produit  $e^{-A} e^A$ .

3. Application :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer  $e^A$ .

**Exercice 1073** Soit  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$  tel que  $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), AXB = 0$ . Montrer que  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

**Exercice 1074** Soit  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$  tel que  $AB = I + A + A^2$ . Montrer que  $AB = BA$  (*Indication* : voir d'abord que  $A$  est inversible).

**Exercice 1075** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, montrer que :

$$A^n = 0.$$

**Exercice 1076** Calculer les puissances de :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1077** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice  $i$  tel que  $A^i = 0$ . Montrer que si  $A$  et  $B$  sont nilpotentes et commutent, alors  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ . En déduire que  $\exp(A)$  est toujours inversible et calculer son inverse.

**Exercice 1078** Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1079** Calculer l'inverse de :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots \\ \dots & 0 & 1 & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 1080 (Examen)** Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -9x_n - 18y_n \\ y_{n+1} = 6x_n + 12y_n \end{cases}$$

avec  $x_0 = -137$  et  $y_0 = 18$ . On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

1. Montrer qu'il existe une matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  telle que la relation de récurrence linéaire ci-dessus soit équivalente à la relation  $U_{n+1} = AU_n$ , où  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ .
2. Trouver une expression de  $U_n$  en fonction de  $A$  et de  $U_0$ .
3. Trouver le noyau de  $A$ , et en donner une base  $B_1$ . Calculer le rang de  $A$ .
4. Montrer que l'ensemble des vecteurs  $X \in \mathbb{R}^2$  tels que  $AX = 3X$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Quelle est sa dimension ? En donner une base, qu'on notera  $B_2$ .
5. Montrer que la réunion  $B_1 \cup B_2$  forme une base  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $P$  la matrice formée des composantes des vecteurs de  $B$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $P$  est inversible, et que le produit  $P^{-1}AP$  est une matrice diagonale  $D$  qu'on calculera.
6. Montrer que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Calculer  $D^n$ , et en déduire  $A^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
7. Donner les termes généraux  $x_n$  et  $y_n$ .

[Exercice corrigé]

### 20.3 Matrice provenant d'un endomorphisme

**Exercice 1081** Soit  $h$  l'homomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  défini par rapport à deux bases  $(e_1, e_2, e_3)$  et  $(f_1, f_2)$  par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. On prend dans  $\mathbb{R}^3$  la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice  $A_1$  de  $h$  ?

2. On choisit pour base de  $\mathbb{R}^2$  les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

en conservant la base  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Quelle est la nouvelle matrice  $A_2$  de  $h$  ?

**Exercice 1082** Soit  $h$  une application linéaire de rang  $r$ , de  $E$ , espace vectoriel de dimension  $n$ , dans  $F$ , espace vectoriel de dimension  $m$ .

1. Préciser comment obtenir une base  $(e_i)_{i=1}^n$  de  $E$ , et une base  $(f_j)_{j=1}^m$  de  $F$ , telles que  $h(e_k) = f_k$  pour  $k = 1, \dots, r$  et  $h(e_k) = 0$  pour  $k > r$ . Quelle est la matrice de  $h$  dans un tel couple de bases ?
2. Déterminer un tel couple de bases pour l'homomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  défini dans les bases canoniques par :

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 - 2x_4 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

3. Même question pour l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y).$$

**Exercice 1083** On désigne par  $\mathcal{P}_2$  l'espace des polynômes sur  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par  $(e_0, e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathcal{P}_2$  et on pose

$$p_0 = e_0, \quad p_1 = e_1 - \frac{1}{2}e_0, \quad p_2 = e_2 - e_1 + \frac{1}{2}e_0.$$

1. Montrer que tout polynôme de  $\mathcal{P}_2$  peut s'écrire de façon unique sous la forme  $p = b_0p_0 + b_1p_1 + b_2p_2$ .
2. Écrire sous cette forme les polynômes :  $p'_0, p'_1, p'_2, p', Xp', p''$ .
3. Montrer que l'application  $\varphi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  définie par  $\varphi(p) = Xp' - \frac{1}{2}p' + \frac{1}{4}p''$  est une application linéaire. Préciser le noyau et l'image de cette application. Écrire les matrices de cette application par rapport à la base canonique  $(e_i)$  et par rapport à la base  $(p_i)$ . Écrire la matrice de passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(p_i)$  ; quelle relation lie cette matrice aux deux précédentes ?

**Exercice 1084** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application  $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ . On considère  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et on fixe la base  $\varepsilon = \{1, i\}$ .

1. Montrer que  $f$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.
2. Calculer  $A = \text{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)$ .

3. Existent-ils  $x$  et  $y \in \mathbb{C} - \{0\}$  tels que  $f(x) = x$  et  $f(y) = -y$ ? Si c'est le cas déterminer un tel  $x$  et un tel  $y$ .
4. Décrire géométriquement  $f$ .
5. Soit  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application  $z \mapsto e^{i\rho}z$ . Calculer  $A = \text{Mat}(g \circ f, \varepsilon, \varepsilon)$  et décrire géométriquement  $g \circ f$ .

**Exercice 1085** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f^3 = -f$  et  $f \neq 0$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + I) = \{0\}$ ,  $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$  et  $\text{Ker}(f^2 + I) \neq \{0\}$ .
2. Soit  $x$  un élément distinct de 0 de  $\text{Ker}(f^2 + I)$ . Montrer qu'il n'existe pas  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \alpha x$ . En déduire que  $\{x, f(x)\}$  est libre.
3. Calculer  $\dim(\text{Ker}(f))$  et  $\dim(\text{Ker}(f^2 + I))$ .

4. Déterminer une base  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :  $\text{Mat}(f, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1086** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même et  $x$  un élément de  $E$  tel que la famille  $f(x), \dots, f^n(x)$  soit libre.

1. Montrer que la famille  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$  est une base de  $E$ . Déduiser-en que  $f$  est bijective.
2. On suppose maintenant que  $f^n(x) = x$ . Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ .

**Exercice 1087** Déterminer la matrice de la projection de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}\vec{i}$  parallèlement à  $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$  dans la base  $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$  puis  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

**Exercice 1088** Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{R}_n[X]$ , ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à  $n$ , est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que la famille  $1, X, \dots, X^n$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soient  $f, g$  et  $h$  les applications de  $\mathbb{R}[X]$  dans lui-même définies par :

$$\begin{aligned} f(P(X)) &= XP(X), \\ g(P(X)) &= P'(X), \\ h(P(X)) &= (P(X))^2. \end{aligned}$$

Montrer que les applications  $f$  et  $g$  sont linéaires, mais que  $h$  ne l'est pas.  $f$  et  $g$  sont-elles injectives? Surjectives? Déterminer la dimension de leurs noyaux respectifs. Déterminer l'image de  $f$ .

3. On désigne par  $f_n$  et  $g_n$  les restrictions de  $f$  et de  $g$  à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que l'image de  $g_n$  est incluse dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et celle de  $f_n$  est incluse dans  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ . Déterminer la matrice de  $g_n$  dans la base  $1, X, \dots, X^n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer la matrice de  $f_n$  de la base  $1, X, \dots, X^n$  dans la base  $1, X, \dots, X^{n+1}$ . Calculer les dimensions respectives des images de  $f_n$  et de  $g_n$ .

**Exercice 1089** Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application de  $M_2(\mathbb{R})$  dans lui-même  $M \mapsto AM$ . Montrer que  $f$  est linéaire. Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1090** Soit  $\varphi$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même telle que  $\varphi \neq 0$  et  $\varphi^2 = 0$ .

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\varphi(x) \neq 0$ . Montrer que  $\{x, \varphi(x)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

**Exercice 1091** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .

1. On suppose que  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^2)$ . Soit  $p \geq 1$  et  $x \in \text{Ker}(\varphi^p)$ . Montrer que  $x \in \text{Ker}(\varphi^{p-1})$ . En déduire que  $\text{Ker}(\varphi^p) = \text{Ker}(\varphi)$  pour tout  $p \geq 1$ .
2. Montrer de même que si  $\text{Ker}(\varphi^2) = \text{Ker}(\varphi^3)$  alors  $\text{Ker}(\varphi^p) = \text{Ker}(\varphi^2)$  pour tout  $p \geq 2$ .
3. On suppose désormais que  $\varphi$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même telle que  $\varphi^2 \neq 0$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\varphi^2(x) \neq 0$ . Montrer que  $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans cette base.

**Exercice 1092** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$  telle que  $\varphi^2 = 0$  et  $\varphi \neq 0$ . Posons  $r = \text{rg}(\varphi)$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Ker}(\varphi)$ . Déduis-en que  $r \leq 3 - r$ . Calculer  $r$ .
2. Soit  $e_1 \in E$  tel que  $\varphi(e_1) \neq 0$ . Posons  $e_2 = \varphi(e_1)$ . Montrer qu'il existe  $e_3 \in \text{Ker}(\varphi)$  tel que la famille  $\{e_2, e_3\}$  soit libre. Montrer que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est une base de  $E$ .
3. Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

**Exercice 1093** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans lui-même telle que  $\varphi^2 = \varphi$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$ .
2. Supposons que  $E$  est de dimension finie  $n$ . Posons  $q = \dim(\text{Ker}(\varphi))$ . Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  telle que :  $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_q) = 0$  et, pour tout  $r > q$ ,  $\varphi(e_r) = e_r$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 1094** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , définie en posant, pour tout  $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$  :  $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire et que son image est incluse dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Dans le cas où  $n = 3$ , donner la matrice de  $f$  dans la base  $1, X, X^2, X^3$ . Déterminer ensuite, pour une valeur de  $n$  quelconque, la matrice de  $f$  dans la base  $1, X, \dots, X^n$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . Calculer leurs dimensions respectives.
4. Soit  $Q$  un élément de l'image de  $f$ . Montrer (en utilisant en particulier les résultats de la deuxième question) qu'il existe un unique  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $f(P) = Q$  et  $P(0) = P'(0) = 0$ .

## 20.4 Endomorphisme provenant d'une matrice

**Exercice 1095** Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de l'espace  $E$  à trois dimensions sur un corps  $K$ .  $I_E$  désigne l'application identique de  $E$ . On considère l'application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Étudier le sous-espace  $\text{ker}(f - I_E)$  : dimension, base.
2. Étudier le sous-espace  $\text{ker}(f^2 + I_E)$  : dimension, base.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base ? et celle de  $f^2$  ?

**Exercice 1096** Soit  $E$  un espace à  $n$  dimensions et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que la condition  $f^2 = 0$  est équivalente à  $\text{Im} f \subset \text{ker} f$ . Quelle condition vérifie alors le rang de  $f$  ? On suppose dans le reste de l'exercice que  $f^2 = 0$ .

2. Soit  $E_1$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$  et soit  $(e_1, e_2, \dots, e_r)$  une base de  $E_1$ . Montrer que la famille des vecteurs  $(e_1, e_2, \dots, e_r, f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_r))$  est libre. Montrer comment on peut la compléter, si nécessaire, par des vecteurs de  $\ker f$  de façon à obtenir une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base ?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on  $\text{Im } f = \ker f$  ?
4. Exemple : Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est
 
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 Montrer que  $f^2 = 0$ . Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de  $f$  a la forme indiquée dans la question 2).

**Exercice 1097** Soit trois vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  formant une base de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $T$  la transformation linéaire définie par  $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ ,  $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ .

1. Déterminer le noyau de cette application. Écrire la matrice  $A$  de  $T$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
2. On pose  $f_1 = e_1 - e_3$ ,  $f_2 = e_1 - e_2$ ,  $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$ . Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Les vecteurs  $f_1, f_2, f_3$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ?
3. Calculer  $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$  en fonction de  $f_1, f_2, f_3$ . Écrire la matrice  $B$  de  $T$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$  et trouver la nature de l'application  $T$ .
4. On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ . Quelle relation lie  $A, B, P$  et  $P^{-1}$  ?

**Exercice 1098** Soit  $M_{\alpha, \beta}$  la matrice :  $M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ . Déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  l'application linéaire qui lui est associée est surjective.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1099**

1. Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\{e_1, \dots, e_p\}$  une famille génératrice de  $E$ . Montrer l'égalité  $\text{Im } (\varphi) = \text{Vect } \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)\}$ .
2. Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\text{rg}(A)$  et  $\text{rg}(B)$ . Déterminer une base des noyaux et une base des images respectifs de  $f_A$  et de  $f_B$ .

**Exercice 1100** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\varphi$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(\varphi) = 0$ . (On pourra utiliser le fait que  $\mathcal{L}(E)$  est isomorphe à  $M_n(\mathbb{R})$ .)

[Exercice corrigé]

**Exercice 1101** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . En utilisant l'application linéaire associée de  $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$ , calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ .



**Exercice 1102** Même chose avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1103** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  dans la base canonique. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ .

**Exercice 1104** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  de matrice  $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$  dans la base canonique. Soient  $e_1 = (-2, 3)$  et  $e_2 = (-2, 5)$ .

1. Montrer que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et déterminer  $\text{mat}(f, e)$ .
2. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$ .

**Exercice 1105** Soit  $E = \text{vect}(AB - BA, (A, B) \in M_n(\mathbb{Q})^2)$ .

1. Montrer que  $E = \ker \text{tr}$  (pour l'inclusion non triviale, on trouvera une base de  $\ker \text{tr}$  formée de matrices de la forme  $AB - BA$ ).
2. Soit  $f \in M_n(\mathbb{Q})^*$  telle que  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{Q})^2 f(AB) = f(BA)$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f = \alpha \text{tr}$ .

**Exercice 1106** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\Phi : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$ . Montrer que  $\Phi$  est linéaire, déterminer sa matrice dans la base canonique et calculer  $\ker \Phi$  et  $\text{Im} \Phi$ .

## 21 Déterminants, systèmes linéaires

### 21.1 Formes multilinéaires

**Exercice 1107** On considère l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ . On rappelle que la *trace*  $\text{tr}(A)$  d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la somme de ses coefficients diagonaux.

Pour une matrice  $M$  donnée, on note  $\alpha_M$  l'application définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M(X) = \text{tr}(MX).$$

1. Vérifier que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha_M \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ .

On note  $\phi$  l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ M & \mapsto & \alpha_M \end{array}$$

2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $\phi$ .

3. En déduire que pour toute forme linéaire  $\alpha \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ , il existe une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \alpha(X) = \text{tr}(AX).$$

4. Déterminer toute les formes linéaires  $\alpha \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$  telles que

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \alpha(XY) = \alpha(YX).$$

**Exercice 1108** On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour chaque  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\alpha_i$  l'application

$$\begin{aligned} \alpha_i : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(x_i) \end{aligned}$$

- Vérifier que chaque  $\alpha_i$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$
- On note  $G$  l'espace engendré par  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ . Déterminer  $G^\circ$ . En déduire que la famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est une base de  $(\mathbb{R}_n[X])^*$ .
- Montrer que la famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est une base de  $(\mathbb{R}_n[X])^*$ .
- Montrer qu'il existe des réels  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

- Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  telle que
 
$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2 \quad P_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- En déduire que pour toute fonction continue  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe un polynôme  $P$  de degré  $n$ , qui interpole  $f$  en chaque point  $x_i$ , c'est à dire qui satisfait :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i).$$

**Exercice 1109** Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , est multilinéaire.

$$\begin{aligned} \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= x_1 + y_2 + z_3 \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= x_1 y_3 + y_2 z_1 + z_3 x_2 \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3 + z_1 z_2 z_3 \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3 \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(z_1 + z_3) \\ \phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) &= (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3) \end{aligned}$$

**Exercice 1110** Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur  $\mathbb{R}^2$  est un espace vectoriel. En donner une base.

**Exercice 1111** Donner toutes les formes tri-linéaires alternées sur  $\mathbb{R}^2$ . Plus généralement, que dire des formes  $m$ -linéaires alternées sur un espace de dimension  $n$  lorsque  $m > n$  ?

**Exercice 1112** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ . On considère l'application  $\Phi_A$  suivante :

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M = (C_1, \dots, C_n) & \mapsto & \det(AM) \end{array}$$

Montrer que  $\Phi_A$  est  $n$ -linéaire.

Calculer  $A \times \left( \begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \text{id}_{n-2} \end{array} \right)$ . En déduire que  $\Phi_A(e_2, e_1, e_3 \dots e_n) = -\Phi_A(e_1, e_2, e_3 \dots e_n)$ .

Plus généralement, montrer que  $\Phi_A$  est alternée.

Montrer que  $\Phi_A(M) = \det(A) \det(M)$ .

En déduire que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad \det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B)$$

**Exercice 1113** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique, on considère les applications  $\omega$  et  $\alpha$  suivantes :

$$\omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right) & \mapsto & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) & \mapsto & x_3 \end{array}$$

1. Montrer que  $\omega$  est antisymétrique et bilinéaire.

A l'aide de  $\omega$  et  $\alpha$ , on définit une nouvelle application, notée  $\omega \wedge \alpha$ , de la façon suivante :

$$\omega \wedge \alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) & \mapsto & \omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(X) + \omega(Z, X)\alpha(Y) \end{array}$$

2. Montrer que  $\omega \wedge \alpha$  est alternée.

3. Montrer que  $\omega \wedge \alpha$  est trilinéaire.

4. Calculer  $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$ . En déduire que  $\forall (X, Y, Z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \quad \omega \wedge \alpha(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$

## 21.2 Calcul

**Exercice 1114** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exercice 1115** Calculer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  le rang des matrices  $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$  et  $N_t =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1116**

1. Soient  $A \in M_p(\mathbb{R})$  et  $B \in M_q(\mathbb{R})$ . Calculer (en fonction de  $\det(A)$  et  $\det(B)$ ) le déterminant de la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$ . (On pourra pour cela décomposer  $M$  comme produit de deux matrices de déterminant évident et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient  $A \in M_p(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_q(\mathbb{R})$  et  $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ . Calculer le déterminant de la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{R})$ . (On pourra généraliser la méthode de 1.)

**Exercice 1117** Sans calcul, montrer que  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$  est divisible par 17.

**Exercice 1118** Soit  $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$  de taille  $n = 2$  ou  $3$  avec  $a_{i,j}$  des fonctions dérivables.

1. Montrer que  $\Delta'(x)$  est la somme des  $n$  déterminants obtenus en remplaçant successivement dans  $\Delta(x)$  chaque colonne par sa dérivée.

2. Calculer  $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ .

**Exercice 1119** Calculer  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$  et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

**Exercice 1120** La famille  $(2, 1, 0)$ ,  $(1, 3, 1)$ ,  $(5, 2, 1)$  est-elle libre ?

**Exercice 1121** Calculer  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ .

**Exercice 1122** Calculer  $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$

**Exercice 1123** Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $e_i$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont la  $i$ -ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice  $n \times n$  dont les vecteurs colonnes  $C_i$  sont donnés par  $C_i = e_i + e_n$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $C_n = e_1 + e_2 + e_n$ . Calculer alors son déterminant.

**Exercice 1124** On note  $a, b, c$  des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de  $D_2$  à un déterminant  $n \times n$  du même type.

**Exercice 1125** On note  $a_1, \dots, a_n$  des réels. Calculer les déterminants  $n \times n$  suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

**Exercice 1126** Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{a-c}{2}$$

**Exercice 1127** Soient  $a, b$  deux réels distincts. Calculer le déterminant suivant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

**Exercice 1128** Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre  $m$ , le rang de cette matrice.

**Exercice 1129** Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & \\ -4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en fonction de  $n$ . (vérifier que  $-1$  est racine de  $X^3 - 3X^2 + 4$ )

**Exercice 1130** Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 1131** Soit  $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , on note  $A_n$  le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & & \\ \vdots & 0 & \cdots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, A_n = aA_{n-1} - xy a^{n-2}$ . En déduire une expression de  $A_n$  en fonction de  $n, a, x$  et  $y$ .

**Exercice 1132** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \neq b$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , on note  $B_n$  le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ,  $B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$  Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

**Exercice 1133** On s'intéresse aux suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \quad (\star)$$

1. Déterminer toutes les suites complexes satisfaisant la relation  $(\star)$ .
2. Déterminer toutes les suites réelles satisfaisant la relation  $(\star)$ .

On considère maintenant le déterminant d'ordre  $n$  suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calculer  $\Delta_{n+2}$  en fonction de  $\Delta_{n+1}$  et  $\Delta_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (on pose  $\Delta_0 = 1$ ).  
En déduire la valeur de  $\Delta_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 1134** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 1135** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Exercice 1136** Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le

développer que le déterminant  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  est divisible par 17.

**Exercice 1137** Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

**Exercice 1138** Pour  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ , on note  $A_{(a_0 \dots a_n)}$  la matrice

$$A_{(a_0 \dots a_{n-1})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

et à  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on associe  $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda) = \det(A_{(a_0 \dots a_{n-1})} - \lambda \text{id})$ . Calculer  $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$  en fonction de  $\Delta_{(a_1 \dots a_{n-1})}(\lambda)$  et  $a_0$ . En déduire  $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ .

**Exercice 1139** Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} p & q & & 0 \\ 1 & p & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & q \\ & & & 1 & p \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

**Exercice 1140** Soit  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ . On considère l'application  $\phi$  suivante :

$$\phi : \begin{matrix} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Etudier la multi-linéarité de  $\phi$  par rapport aux colonnes de  $A$ . Calculer  $\phi(\text{id})$ . En déduire que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

Soit  $M = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire par blocs. Montrer que  $\det(M) = \det(A_1) \cdots \det(A_k)$ .

**Exercice 1141** Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{45} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \end{vmatrix}$$

Comment généraliser ce résultat en dimension plus grande ?

**Exercice 1142** Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 1143** Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Calculer

$$\Delta_n(a_0, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

**Exercice 1144** Soit  $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit  $AV$ , puis  $\det(AV)$  en fonction de  $\det(V)$ , et en déduire  $\det(A)$ .

**Exercice 1145** Soit  $a$  un réel. On note  $\Delta_n$  le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Calculer  $\Delta_n$  en fonction de  $\Delta_{n-1}$ . Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \Delta_n = a^{n-2} (a^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2)$

**Exercice 1146** Soit  $a$  un réel différent de 1. Pour  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer  $D_n$  en fonction de  $D_{n-1}$  et  $D_{n-2}$ . Montrer que  $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$ . Combien vaut  $D_n$  si  $a = 1$  ?

**Exercice 1147** Soient  $a, b, c$  trois réels et  $\Delta_n$  le déterminant de taille  $n$  suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose  $\Delta_0 = 1$ ,  $\Delta_1 = a$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$ .
2. On suppose que  $a^2 = 4bc$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1) \frac{a^n}{2^n}$$

**Exercice 1148** Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$



**Exercice 1149** Soit  $\Delta_n$  le déterminant de taille  $n$  suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$  (avec la convention  $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 3$ ).
2. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$

**Exercice 1150** Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  définie par  $u(P) = P + P'$ . Calculer  $\det u$ . Même question lorsque  $u(P) = XP' + P(1)$ .

### 21.3 Applications

**Exercice 1151** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $\varphi^2 = -\text{id}_E$ .

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas  $n = 2$  ou  $4$ .
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si  $n$  est pair.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1152** Inverser les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ainsi que leurs produits.

### 21.4 Divers

**Exercice 1153** Montrer que  $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$  sans le développer.

**Exercice 1154** Une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\mathbb{R})$  est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout  $i > j : a_{ij} = 0$ .

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que  $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ .
3. Soit  $E$  un espace vectoriel,  $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $E_i$  l'espace vectoriel engendré par  $\{e_1, \dots, e_i\}$ , pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Montrer que  $\text{Mat}(\varphi, \varepsilon)$  est triangulaire supérieure si et seulement si  $\varphi(E_i) \subset E_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 1155** On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = I + N.$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  calculer  $\det(A^n)$ .
2. Calculer  $N^2$  et  $N^3$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donner le rang de  $N^n$  et celui de  $A^n$ .
4. En utilisant 1., donner, en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'expression de la matrice  $M(n) = A^n$ .
5. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier la formule  $(A^n)^{-1} = M(-n)$ . Expliquer et justifier l'écriture :  $A^n = M(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 1156** Soit  $S$  la matrice  $5 \times 5$  à coefficients réels :  $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $\det(S)$ . Déterminer (de préférence sans calcul)  $S^{-1}$ .
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_2$  de  $\mathbb{R}^5$  de dimension respective 2 et 3 tels que :  $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2$  et  $S(E_1) \subset E_1$ ,  $S(E_2) \subset E_2$ .
3. Montrer qu'il existe  $x \in E_2$  tels que  $Sx = x$ . En déduire que la décomposition qui précède n'est pas unique.

**Exercice 1157** Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  anti-symétrique. Calculer  $\det(A)$ . Ce résultat vaut-il encore pour  $A \in M_2(\mathbb{R})$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 1158** Soient  $n = 2$  ou  $3$  et  $A \in M_n(\mathbb{Q})$ .

1. Montrer que si  $\forall X \in M_n(\mathbb{Q}) \det(A + X) = \det(X)$  alors  $A = 0$ .
2. Soit  $B \in M_n(\mathbb{Q})$  telle que  $\forall X \in M_n(\mathbb{Q}) \det(A + X) = \det(B + X)$ . Montrer que  $A = B$ .

**Exercice 1159** Soit  $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$  tel que  $A^2 + B^2 = AB$  et  $AB - BA$  inversible. Montrer que 3 divise  $n$ .

**Exercice 1160** Montrer que si  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\det(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

**Exercice 1161** Montrer que si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in M_n(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) = n &\Rightarrow \text{rg}(\text{Com}(A)) = n; \\ \text{rg}(A) = n - 1 &\Rightarrow \text{rg}(\text{Com}(A)) = 1; \\ \text{rg}(A) \leq n - 2 &\Rightarrow \text{rg}(\text{Com}(A)) = 0. \end{aligned}$$

**Exercice 1162** Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} &\leq 1, \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Montrer que  $|\det(A)| < 1$ .

## 21.5 Systèmes linéaires

**Exercice 1163** Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

**Exercice 1164** Sans chercher à résoudre les systèmes suivants, discuter la nature de leurs ensembles de solution :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

**Exercice 1165** Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  réels distincts, et  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ,  $n + 1$  réels (distincts ou non).

Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(x_i) = y_i$$

**Exercice 1166** Résoudre, suivant les valeurs de  $m$  :

$$(S_1) \begin{cases} x + (m+1)y = m+2 \\ mx + (m+4)y = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} mx + (m-1)y = m+2 \\ (m+1)x - my = 5m+3 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1167** Écrire les conditions, portant sur les réels  $a, b, c$ , pour que les systèmes suivants admettent des solutions non nulles ; expliciter ces solutions.

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - a(y+z) = 0 \\ y - b(x+z) = 0 \\ z - c(x+y) = 0 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1168** Résoudre et discuter suivant les valeurs de  $b_1, b_2, b_3$  et  $b_4$  :

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + 4z + 7t = b_1 \\ x + 3y + 4z + 5t = b_2 \\ x + 3y + 3z + 2t = b_3 \\ x + y + z + t = b_4 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 3y + 5z + 3t = b_1 \\ x + 4y + 7z + 3t = b_2 \\ y + 2z = b_3 \\ x + 2y + 3z + 2t = b_4 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + y + 2z - t = b_1 \\ -x + 3y + t = b_2 \\ 2x - 2y + 2z - 2t = b_3 \\ 2y + z = b_4 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x + 2y + z + 2t = b_1 \\ -2x - 4y - 2z - 4t = b_2 \\ -x - 2y - z - 2t = b_3 \\ 3x + 6y + 3z + 6t = b_4 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1169** Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels  $\lambda, a, b, c, d$  :

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1170** Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels  $\lambda$  et  $a$  :

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y - z + t = \lambda \\ 2x + y - z = \lambda - 1 \\ 5x + 4y - 2z = 2\lambda \\ (\lambda + 2)x + (\lambda + 2)y - z = 3\lambda + a \\ 3x - z + 3t = -\lambda^2 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1171** Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

$$1. \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + 4z + 4t = 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t = 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t = 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 3x - y - 3z + 2t = 5 \\ 5y + 9z - t = -6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - y + z + t = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 8 \\ 3x + y - z + t = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

**Exercice 1172** Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}, D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

**Exercice 1173** Résoudre et discuter le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = b_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = b_4 \end{cases}$$

**Exercice 1174** On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^5$  dans  $\mathbb{R}^4$  qui à un élément  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  associe l'élément  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ , défini par :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = y_4 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. On considère  $A$  l'ensemble des solutions de  $(S_H)$ .

$$(S_H) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nature de  $A$ ? Que représente  $A$  pour l'application  $f$ ? Donner une base de  $A$ ; quelle est la dimension de  $A$ ? Donner un système minimal d'équations qui définissent  $A$ .

3. Dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ , on considère les cinq vecteurs :  $V_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $V_2 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $V_3 = (3, 1, 4, 2)$ ,  $V_4 = (10, 4, 13, 7)$ ,  $V_5 = (1, 7, 8, 14)$ . Que représentent ces vecteurs pour l'application  $f$ ? Trouver une base de  $\text{Im} f$ .
4. On considère le système  $(S)$  où les inconnues sont les  $x_i$ , et où les  $y_j$  sont des paramètres. Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de  $f$ ?
5. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de  $f$  et le rang du système?

**Exercice 1175** Pour tout  $a$  réel, on considère la matrice  $A$  et le système linéaire  $(S)$  définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (S) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = 1 \end{cases}$$

aux inconnues réelles  $x, y, z, t$ .

1. Discuter le rang de  $A$  suivant les valeurs de  $a$ .
2. Pour quelles valeurs de  $a$  le système  $(S)$  est-il de Cramer? Compatible? Incompatible?
3. Lorsqu'il est de Cramer, résoudre  $(S)$  avec un minimum d'opérations (on pourra montrer d'abord que l'on a nécessairement  $x = y = z = t$ ).
4. Retrouver 3. par application des formules de Cramer.

**Exercice 1176** Déterminer le noyau de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

**Exercice 1177** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer les  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que  $\exists X \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  tel que  $AX = \lambda X$ . Pour chaque  $\lambda$  déterminer  $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\}$ .

**Exercice 1178** Donner une base de l'ensemble des solutions de  $\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$ .

**Exercice 1179** Résoudre suivant les valeurs de  $a \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ a^2x + y + az = 0 \\ ax + a^2y + z = 0 \end{cases}$ .

**Exercice 1180** Résoudre suivant les valeurs de  $a$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  
$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = \mu \\ x + y + az + t = \mu^2 \\ x + y + z + at = \mu^3 \end{cases} .$$

**Exercice 1181** Inverser en utilisant un système linéaire la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1182** Résoudre 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} .$$

**Exercice 1183** Résoudre 
$$\begin{cases} -cy + bz = \alpha \\ cx - az = \beta \\ -bx + ay = \gamma \end{cases} .$$

**Exercice 1184** Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  des éléments  $(x, y, z, t)$  qui satisfont :

$$\begin{cases} x + y + z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 4t = 0 \\ 2x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$$

Donner une base de  $F$  et sa dimension.

**Exercice 1185** On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système  $(S)$  puis indiquer son rang.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de  $(S)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , indiquer sa dimension et en donner une base.

**Exercice 1186** L'objectif de ce problème est de résoudre l'énigme du berger :

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ? On montre, dans un premier temps, un résultat utile pour la démonstration finale.

1. (a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.  
(b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.
2. L'objectif de cette question est de résoudre l'énigme du berger. On note  $B$  la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante :  
On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le  $i$ ème mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B)

et de même poids. On note alors  $B_{i,j}$  les coefficients de la  $i$ ème ligne de la matrice  $B$  obtenu de la façon suivante

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le } j\text{-ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le } j\text{-ième mouton se trouve dans le troupeau B} \end{cases} .$$

On note  $X$  la matrice de taille  $101 \times 1$  constituée des poids des moutons

$$X = \begin{pmatrix} \text{poids du mouton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix} .$$

On note  $M$  le poids total du troupeau.

(a) Calculer

$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Calculer

$$BX.$$

(c) Montrer que  $B$  est inversible.

(d) En déduire  $X$  et résoudre l'énigme du berger.

## 21.6 Rang

**Exercice 1187** Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible? Calculer dans ce cas son inverse.

**Exercice 1188** Soient  $a$  et  $b$  deux réels, et  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\text{rg}(A) \geq 2$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  a-t-on  $\text{rg}(A) = 2$ ?

**Exercice 1189** Soient  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $v_2 = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  deux vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^3$ . Donner,

sous forme d'équation, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur  $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

appartienne à l'espace vectoriel engendré par  $v_1$  et  $v_2$ .

Même question pour un plan engendré par deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 1190** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Discuter dans chacun des cas ci-dessous la dimension du noyau de  $u$ .

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 12-\lambda & -6 \\ -9 & -5-\lambda \\ -12 & -8 \end{pmatrix} \quad 9$$

**Exercice 1191** Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels  $x$  et  $y$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1192** Sans chercher à le résoudre, discuter la nature des solutions du système suivant, en fonction de  $\alpha, a, b$  et  $c$  :

$$\begin{cases} x - y - \alpha z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$$



## Quatrième partie

# ANALYSE 2

## 22 Suites : compléments

### 22.1 Limites

**Exercice 1193** Soient  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par  $u_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$  et  $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \geq 2}$  est convergente.
2. Montrer que  $(v_n)_{n \geq 2}$  est une suite géométrique. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \geq 2}$ .

**Exercice 1194** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de nombres réels telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ . Montrer que les valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1195** On définit par récurrence les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .
2. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissent. En déduire qu'elles convergent vers  $\ell$  et  $\ell'$  respectivement. Montrer que l'on a  $\ell\ell' = 0$ .
3. Montrer que la suite  $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante. En déduire  $\ell$  et  $\ell'$ .

**Exercice 1196** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels telles que  $0 < u_1 < v_1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ . Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

**Exercice 1197**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels non nuls convergeant vers une limite  $\ell$  différente de zéro. Montrer que la suite  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{\ell}$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs convergeant vers une limite  $\ell$  différente de zéro. Montrer que la suite  $(\sqrt{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{\ell}$ .

**Exercice 1198**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels telle que les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $\ell$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge également vers  $\ell$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}$  converge.

**Exercice 1199** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels et  $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que si  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ , alors  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ . La réciproque est elle vraie ?

2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2nk+k}$ .

3. Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = \ell$ . Prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$ .

4. Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement positive telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ . Démontrer que
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{1/n} = \ell.$$

**Exercice 1200** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$ . On rappelle que  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

1. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes. En déduire une valeur approchée de  $e$  à  $\frac{1}{1000}$ .
2. Démontrer que  $e$  est irrationnel.

**Exercice 1201** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite de Cauchy lorsque, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, si  $m, n \geq N$  alors  $|u_n - u_m| < \varepsilon$ .

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Soit  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ . Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2^p} \geq \frac{p+2}{2}$ . En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini.
3. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait au critère  $\mathcal{C}'$  lorsque, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, si  $n \geq N$  alors  $|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon$ . Une suite satisfaisant au critère  $\mathcal{C}'$  est-elle de Cauchy ?
4. Montrer que les trois assertions qui suivent sont équivalentes :
  - (a) Toute partie majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure et toute partie minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.
  - (b) Toute suite de Cauchy est convergente.
  - (c) Deux suites adjacentes sont convergentes.

## 22.2 Suites récurrentes linéaires

**Exercice 1202** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0$  et  $u_1$  strictement positifs et  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Montrer que  $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  existe et la déterminer. Que remarquez-vous ?
2. Soit  $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ .
3. Montrer que  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$  sont adjacentes.
4. Déterminer un rationnel  $r$  tel que  $\left|r - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| < 10^{-3}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1203** Déterminer  $(u_n)$  telle que

1.  $u_0 = 1, u_1 = 3, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .
2.  $u_0 = 1, u_1 = i, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$ .

**Exercice 1204** Déterminer les suites bornées qui vérifient  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1205** Déterminer les suites convergentes qui vérifient  $2u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$ .

**Exercice 1206** Montrer que la suite  $u_0 = 1, u_1 = 2$  et  $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$  est bien définie et la déterminer.

**Exercice 1207** Déterminer les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  qui vérifient  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -2 \end{cases}$  et  $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

### 22.3 Suites de Cauchy

**Exercice 1208** Montrer que la suite  $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et que la suite  $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ne l'est pas.

**Exercice 1209** Montrer que la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \dots + \frac{\cos n}{n!}$$

est une suite de Cauchy. En déduire sa convergence.

**Exercice 1210** Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.

Montrer que si  $(u_n)$  est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \geq p, |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}.$$

**Exercice 1211** Une suite  $(x_n)$  est définie par une relation de récurrence  $x_{n+1} = a \sin x_n + b$  où  $a$  est un nombre réel de  $]0, 1[$  et  $b$  un nombre réel quelconque. Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $|x_{p+1} - x_p| \leq a^p |x_1 - x_0|$ . En déduire que la suite  $(x_n)$  est une suite de Cauchy.

Combien de termes faut-il calculer pour obtenir une valeur approchée de  $\lim x_n$  à  $10^{-10}$  près si on suppose  $a = 1/2$ ,  $b = 5$ ,  $x_0 = 1$  ?

## 23 Continuité et comparaison de fonctions

### 23.1 Continuité

**Exercice 1212** Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  dans lui-même telle que  $f(0) = 0$  et pour tout couple  $(x, y)$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$  on ait  $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ .

1. Soit  $x$  un élément de  $[0, 1]$ . On pose  $x_0 = x$  et  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
2. En déduire que  $f(x) = x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
3. Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse  $f(0) = 0$  ?

### 23.2 Comparaison de fonctions

**Exercice 1213** À quelle condition sur  $f$  et  $g$  a-t-on  $e^f \underset{a}{\sim} e^g$  ?

**Exercice 1214** Soient  $f$  et  $g$  équivalentes au voisinage de  $a$  et strictement positives. Montrer que si  $f$  admet en  $a$  une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  différente de 1 alors  $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$ .

**Exercice 1215** Montrer que si  $f$  tend vers 0 en  $a$  alors  $\ln(1 + f) \underset{a}{\sim} f$  et  $e^f - 1 \underset{a}{\sim} f$ .

**Exercice 1216** Étudier en  $+\infty$  et  $-\infty$  la fonction  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ .  
[Exercice corrigé]

**Exercice 1217** Calculer les limites de

1.  $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$  en 0.
2.  $\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$  en 0.
3.  $(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$  en 0.
4.  $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$  en  $+\infty$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1218** Trouver un équivalent simple en  $+\infty$  de  $(\frac{\ln(1+x)}{\ln x})^x - 1$ .

**Exercice 1219**

Limite en  $+\infty$  de  $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

Équivalent en  $+\infty$  de  $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$

Limite en 0 de  $\frac{\tan(ax) - \sin(ax)}{\tan(bx) - \sin(bx)}$

Limite en  $\frac{\pi}{4}$  de  $(x - \frac{\pi}{4}) \tan(x + \frac{\pi}{4})$

Limite en  $\frac{\pi}{4}$  de  $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{(4x - \pi) \tan(x)}$

Équivalent en 0 de  $\frac{\tan(x - x \cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$

Équivalent en  $\frac{\pi}{4}$  de  $(\tan(2x) + \tan(x + \frac{\pi}{4})) (\cos(x + \frac{\pi}{4}))^2$

Limite en 0 de  $x^{\frac{1}{1+2 \ln(x)}}$

Limite en  $\frac{1}{2}$  de  $(2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$

Limite en 0 de  $\frac{(\sin(x))^{\sin(x)} - 1}{(\tan(x))^{\tan(x)} - 1}$

Équivalent en  $+\infty$  de  $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln(\frac{x}{x+1})$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1220** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions réelles. Montrer qu'il existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(t) = o(f(t))$  si  $t \rightarrow \infty$ .

## 24 Dérivabilité : compléments

### 24.1 Dérivées

**Exercice 1221** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sin(x) \leq x$ .

**Exercice 1222** Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  on pose  $f(x) = x \ln(x) - x$ . Montrer que  $f$  est une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $] -1, +\infty[$ . On pose  $g = f^{-1}$  l'application réciproque de  $f$ . Calculer  $g(0)$  et  $g'(0)$ .

**Exercice 1223** Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications suivantes :

1.  $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .
2.  $g : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .
3.  $h : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

**Exercice 1224** Soit  $g$  une fonction 2 fois dérivable sur  $[a, b]$  telle que  $g(a) = g(b) = 0$  et  $g''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . Montrer que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $g(x) \geq 0$ .

**Exercice 1225** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$  on ait  $f(x) \geq 0$ ,  $f'(x) \geq 0$  et  $f''(x) \geq 0$ . Étudier  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

**Exercice 1226** Soit  $f$  une application continue de  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer que si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  existe,  $f$  est dérivable en  $a$ .

**Exercice 1227** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction bornée deux fois dérivable et telle qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on ait  $\alpha f(x) \leq f''(x)$ .

1. (a) Montrer que  $f'$  a une limite en  $+\infty$ . Quelle est la valeur de cette limite?  
 (b) Montrer que  $f$  est décroissante et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
2. (a) Soit  $g : x \mapsto \alpha f^2(x) - (f'(x))^2$ . Montrer que  $g$  est croissante et a pour limite 0 en  $\infty$ .  
 (b) En posant  $f(x) = h(x) \exp(-\sqrt{\alpha}x)$ , montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \leq f(0) \exp(-\sqrt{\alpha}x)$ .

### 24.2 Applications

**Exercice 1228** Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $g_n$  la fonction  $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ .

1. On suppose  $g_n(x) > 0$  pour tout  $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right[$ . Montrer que  $f(1) > f(0)$ .
2. On suppose désormais que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n$  s'annule en au moins un point de l'intervalle  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ .

**Exercice 1229** Pour tout  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on considère le polynôme de degré  $n$  à coefficients réels :

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^2 + X - 1$$

1. Soit  $n \geq 2$ . Montrer que  $P_n$  a une unique racine réelle positive que l'on nommera  $\lambda_n$ . (On pourra étudier l'application  $X \mapsto P_n(X)$ .)
2. Montrer que la suite  $(\lambda_n)_{n \geq 2}$  est croissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera  $\ell$ .
3. Montrer que  $\ell$  est racine du polynôme  $X^2 + X - 1$ . En déduire sa valeur.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1230** Soit  $f$  une fonction d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dérivable sur  $I$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
2.  $f'$  est positive ou nulle sur  $I$  et  $\{x \in I; f'(x) > 0\}$  est dense dans  $I$ .

**Exercice 1231**

1. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivable en 0. Montrer qu'il existe une application  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même telle que  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. En déduire les limites des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies en posant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = (n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - n$  et  $v_n = (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ .
3. Construire un exemple de suite  $(w_n)_{n \geq 1}$  avec,  $u_n < 1$  pour tout  $n \geq 1$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$ . (On pourra s'inspirer de l'exemple de  $(v_n)_{n \geq 1}$  ci-dessus.)

**Exercice 1232** 1. Montrer que pour tout  $x > 0$  on a :  $\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$ .

2. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$  :  $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$ .

3. Posons  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$  Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et convergente.

**Exercice 1233** 1. Soit  $f$  une application continue d'un intervalle  $]a, b[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivable en  $c \in ]a, b[$ . Montrer qu'il existe une (unique) application continue  $\varepsilon$  de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(c) = 0$  et, pour tout  $x \in ]a, b[$  distinct de  $c$ , on ait :

$$f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + (x - c)\varepsilon(x)$$

2. Montrer que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  de terme général :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$$

est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera  $S$ .

3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que  $\frac{1}{2} \leq S \leq 1$ ?

4. Soit  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, dérivable en 0 et telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que la suite  $(\sigma_n(f))_{n \geq 1}$  de terme général :

$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

converge vers  $f'(0)S$  (utiliser 1.).

5. Montrer que  $\sigma_n(f) = \log(2)$  lorsque  $f$  est l'application  $x \mapsto \log(1+x)$  et en déduire la valeur de  $S$ .
6. Calculer la limite de la suite  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  de terme général :

$$\sigma_n = \sin \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n+1} + \cdots + \sin \frac{1}{2n}.$$

7. Plus généralement, quelle est la valeur pour  $p \in \mathbb{N}^*$  donné, de la limite  $S_p$  de la suite  $(\sigma_n(p))_{n \geq 1}$  de terme général :

$$\sigma_n(p) = \sum_{k=0}^{pn} \frac{1}{n+k}?$$

**[Exercice corrigé]**

**Exercice 1234** Soit  $f$  une fonction dérivable et  $a$  un réel. Soit  $h > 0$  un nombre réel strictement positif fixé.

1. Montrer qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$

2. Pour tout  $h \neq 0$  on note :  $\varphi(h) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$ . Montrer que si  $f''(a)$  existe, alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = f''(a)$ .

**Exercice 1235** Soit  $I$  un intervalle ouvert contenant 0 et 1 et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On pose  $p = f(1) - f(0)$ .

1. Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(0) = f'(0)$  et  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  sinon. Montrer que si  $u$  est un réel compris entre  $f'(0)$  et  $p$  alors il existe  $a \in [0, 1]$  tel que  $u = f'(a)$ .
2. Soit  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $h(1) = f'(1)$  et  $h(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$  sinon. Montrer que si  $v$  est un réel compris entre  $f'(1)$  et  $p$  alors il existe  $b \in [0, 1]$  tel que  $v = f'(b)$ .
3. Soit  $w$  un réel compris entre  $f'(0)$  et  $f'(1)$ . Montrer qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $w = f'(c)$ .

**Exercice 1236** Soit  $P(X)$  un polynôme à coefficients complexes de degré 3 ayant trois racines distinctes. Montrer que les racines de  $P'$  sont dans le triangle ayant pour sommet les racines de  $P$

## 25 Développements limités

### 25.1 Calculs de développements limités

**Exercice 1237** Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1.  $x \mapsto \ln(\cos(x))$  (à l'ordre 6).
2.  $x \mapsto \tan(x)$  (à l'ordre 7).
3.  $x \mapsto \sin(\tan(x))$  (à l'ordre 7).
4.  $x \mapsto (\ln(1+x))^2$  (à l'ordre 4).

5.  $x \mapsto \exp(\sin(x))$  (à l'ordre 3).

6.  $x \mapsto \sin^6(x)$  (à l'ordre 9.)

[Exercice corrigé]

**Exercice 1238** 1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$  et  $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$  sinon. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le développement limité de  $f$  en 0. Quelles conclusions en tirer ?

2. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(0) = 0$  et, si  $x \neq 0$  :  $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Montrer que  $g$  a un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'a pas de dérivée seconde (en 0).

**Exercice 1239** Déterminer la limite en 0 de  $\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1240** Faire un développement limité ou asymptotique en  $a$  à l'ordre  $n$  de :

1.  $\ln \cos x$   $n = 6$   $a = 0$ .

2.  $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$   $n = 2$   $a = 0$ .

3.  $\ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$   $n = 3$   $a = 0$ .

4.  $\ln \sin x$   $n = 3$   $a = \frac{\pi}{4}$ .

5.  $\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}$   $n = 4$   $a = +\infty$ .

6.  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$   $n = 3$   $a = 0$ .

7.  $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2})$   $n = 2$   $a = +\infty$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1241** Développements limités en 0 de :

1.  $\cos x \cdot \ln(1+x)$  à l'ordre 4.

2.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4.

3.  $\arcsin(\ln(1+x^2))$  à l'ordre 6.

4.  $\frac{\sinh x - x}{x^3}$  à l'ordre 4.

5.  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  à l'ordre 3.

**Exercice 1242** Pour chacune des fonctions suivantes, donner les conditions sur  $\varepsilon(x)$  pour que ces fonctions soient des développements limités au voisinage d'un point et à un ordre que vous préciserez.

1.  $f_1(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^2\varepsilon(x)$

2.  $f_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)$

3.  $f_3(x) = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{5} + (x-2)^3\varepsilon(x)$

4.  $f_4(x) = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$

5.  $f_5(x) = x^3 + 3x^{-1} + 1 + (x-1)^2\varepsilon(x)$

6.  $f_6(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 2 + (x-2)\varepsilon(x)$



$$7. f_7(x) = \{2x + x^2 + 1 + x^2\varepsilon(x)\}\{-x + 3 + x^2 - x^3\varepsilon(x)\}$$

**Exercice 1243** 1. Développements limités en 1 à l'ordre 3 de  $f(x) = \sqrt{x}$  et de  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

2. Développement limité à l'ordre 3 en  $x_0 \in ]0; \pi[$  de  $h(x) = \ln(\sin x)$ . En déduire un développement limité en  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 1244** Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$  en  $0, +\infty$  et  $-\infty$ .

**Exercice 1245** Donner un développements limité en 0 à l'ordre 10 de :

$$1. x \mapsto \int_0^x \cos t^2 dt.$$

$$2. x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt = F(x^2) - F(x) \text{ où } F \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

**Exercice 1246** Donner le DL2 en  $+\infty$  de :

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} e^{\frac{x}{x-1}}.$$

## 25.2 Applications des développements limités

**Exercice 1247** Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

**Exercice 1248** Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1249** Étudier la position du graphe de l'application  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$  par rapport à sa tangente en 0 et 1.

**Exercice 1250** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ .

**Exercice 1251** Établir pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  l'inégalité :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{3/2} - x^{3/2} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$

**Exercice 1252** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2}e^x$ .

**Exercice 1253** Soit  $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$ .

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de  $f$  en 0 à l'ordre 2.
3. Étudier la dérivabilité du prolongement de  $f$ .

**Exercice 1254** Étudier les branches infinies des fonctions :

$$1. f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

$$2. g(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$$

**Exercice 1255** Soit (1) l'équation  $x - E(x) = \frac{1}{x^2}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un unique  $x_n \in [n, n+1[$  solution de (1).
2. Déterminer un équivalent de  $x_n$ .
3. Faire un DAS de  $x_n - n$  en  $+\infty$  en fonction de  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 5.

**Exercice 1256** Calculer pour  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}, \lim_{n \rightarrow \infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$

**Exercice 1257** Calculer :

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{x \ln x}$$

et donner un équivalent de  $\ell - \left( \frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)^{x \ln x}$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 1258** Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ , on définit  $(u_n(x))_n$  et  $(v_n(x))_n$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2}, v_{n+1}(x) = \sqrt{u_n(x)v_n(x)}, u_0(x) = 1, v_0(x) = x.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite  $\ell_x$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \ell_x$ . Calculer  $f(1), f(0)$ , donner  $f(\frac{1}{x})$  en fonction de  $f(x)$  si  $x > 0$ . Montrer que  $f$  est croissante, en déduire le sens de variations de  $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$ .
3. Montrer que  $f$  est dérivable en 1 (on utilisera  $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$ ) puis que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .
4. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , puis que  $f$  est continue en 0.
5. Donner l'allure du graphe de  $f$ , préciser la tangente en 0 ainsi que le comportement asymptotique en  $+\infty$ .

**Exercice 1259** Soit  $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$ , on définit :

$$u_n(x) = \left( \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer  $\ell_n = \lim_{x \rightarrow 0} u_n(x)$ .

**Exercice 1260** Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \operatorname{sh} 2x}{(1 - \cos 3x) \arctan x}.$$

**Exercice 1261** Soient  $u, v, f$  définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}, v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner un équivalent de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ , en déduire  $\lim_{-\infty} f$ .
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) - x, \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) + x$ . En déduire l'équation d'une droite asymptote au graphe de  $f$  en  $-\infty$  et positionner  $f$  par-rapport à cette asymptote.
3. Même étude en  $+\infty$ .

**Exercice 1262** Soit  $g$  la fonction  $x \mapsto \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$ .

1. Donner le domaine de définition de  $g$ .

2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1263** Soient  $f : x \mapsto \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$  et  $g : x \mapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$  deux fonctions. Déterminer si leurs graphes respectifs ont des asymptotes puis la position de ces graphes par rapport à celles-ci.

**Exercice 1264** Montrer que, pour tout  $x$  réel vérifiant  $|x| \leq 1$  :

$$\left| \frac{x + \sin 2x}{x^9 + x^2 - 3} \right| \leq 2.$$

**Exercice 1265** Déterminer :

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x.$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x.$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{Arctan} x)^{\frac{1}{x^2}}.$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x}.$

**Exercice 1266** 1. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x + 1}{1 + x^2} + \operatorname{Arctan} x.$$

- (a) Quel est le domaine de définition de  $g$  ?
  - (b) Etudier ses variations.
  - (c) Montrer que  $g$  s'annule une et une seule fois sur  $\mathbb{R}$  en un point  $\alpha$  compris entre  $-1$  et  $0$  (on ne demande pas de préciser la valeur de  $\alpha$ ).
  - (d) Dessiner le graphe de  $g$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + 1) \operatorname{Arctan} x.$$

- (a) Calculer la dérivée de  $f$  et établir son tableau de variation.
  - (b) Le graphe de  $f$  a-t-il des points d'inflexion ? Si oui, donner les coordonnées de ce (ou ces) point(s).
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  au graphe de  $f$  et la position de ce graphe par rapport à cette tangente (au voisinage de ce point).
4. En utilisant les résultats de l'exercice ???, montrer que :

- (a)  $\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)$  si  $x > 0$ .
- (b)  $\frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)$  si  $x < 0$ .

5. En déduire l'existence d'une fonction  $\varepsilon$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  et, pour tout  $x > 0$ , on ait :

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

Etablir un résultat analogue pour  $x < 0$ .

6. Quelles sont les asymptotes au graphe de  $f$ ? Préciser la position de ce graphe par rapport à ces asymptotes.
7. Dessiner le graphe de  $f$ .

### 25.3 Formules de Taylor

**Exercice 1267** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$ . Calculer  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 1268** Soit  $a$  un nombre réel et  $f$  une application de classe  $C^2$  de  $]a, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $f'$  et  $f''$  bornées; on pose  $M_0 = \sup_{x \geq a} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \geq a} |f''(x)|$ .

- En appliquant la formule de Taylor en  $x$  et  $x+2h$ , montrer que, pour tout  $x > a$  et tout  $h > 0$ , on a :  $|f'(x+h)| \leq hM_2 + \frac{1}{h}M_0$ .
- En déduire que  $f'$  est bornée sur  $]a, +\infty[$ .
- Établir le résultat suivant : soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  à dérivée seconde bornée et telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ .

**Exercice 1269** Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tels que :  $ae^2 + be + c = 0$ .

- En appliquant la formule de Taylor sur  $[0, 1]$  à l'application  $\varphi : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$  démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $\theta_n \in ]0, 1[$  tel que :

$$-b = \frac{ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{a + (-1)^k c}{k!}.$$

- En déduire que pour  $n$  assez grand  $ae^{\theta_n} + (-1)^n ce^{-\theta_n} = 0$  puis que  $a = b = c = 0$ . (On rappelle que  $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ .)

**Exercice 1270** Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$  et  $f^{(n)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  avec  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| = o\left(\frac{n!}{a^n}\right)$ ,  $a$  constante fixée. Montrer que  $\forall x \in [-a, a], f(x) = 0$ , puis que  $f = 0$ .

**Exercice 1271** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P \geq 0$ . On pose  $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$ . Montrer que  $Q \geq 0$ .

**Exercice 1272** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f \in C^3([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$  (on pourra utiliser Taylor-Lagrange entre  $a, \frac{a+b}{2}, b$ ).

## 26 Intégrales (compléments), intégrales impropres

### 26.1 Intégration sur un compact

**Exercice 1273** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos(nt) f(t) dt = 0$ .

**Exercice 1274** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t^n) dt = 0.$$

Généraliser au cas où  $f(0)$  est quelconque.

**Exercice 1275** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.

1. Montrer que  $f$  est bornée. On pose  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

2. Soient  $x$  et  $y \in [a, b]$  Montrer que  $|\int_x^y f(t) dt| \leq M|x - y|$ . En déduire que l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est continue sur } [a, b].$$

3. Soit  $x_0 \in [a, b]$ . Montrer que si  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $F$  est dérivable en  $x_0$ .

**Exercice 1276** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nt^n f(t^n) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

(On pourra faire le changement de variable  $u = t^n$ ).

**Exercice 1277** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ . Posons  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ . Montrer que  $|\int_a^b f(t) dt| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$ . (Indication : faire des développements limités de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  et  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ ).

**Exercice 1278** Soit  $f$  continue sur  $[0, 1]$  avec  $f(1) \neq 0$ , montrer :

$$\int_0^1 x^n f(t) dt \sim \frac{f(1)}{n}.$$

En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-2t} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

On posera  $u = 1 - \frac{t}{n}$  puis  $v = ue^{2(u-1)}$ .

**Exercice 1279** Donner un développement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

## 26.2 Intégrales impropres

**Exercice 1280** Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(bile)} d(bile).$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1281** 1. Montrer que  $\forall x > -1 \ln(1+x) \leq x$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\forall x \in [0, n] (1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1 + \frac{x}{n})^{-n}$ .

3. En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$

$$\text{Rappel (intégrales de Wallis)} : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

4. Montrer que  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$  existe et vaut  $I_{2n-2}$ .

5. Montrer que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  existe et vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Exercice 1282** Étude de :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Donner un équivalent de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 1283** Soit  $f$  une application  $C^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f + f'' \geq 0$ . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0.$$

**Exercice 1284** Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  et  $F$  de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ , alors  $F$  a aussi la limite  $\ell$  en  $+\infty$ .
2. Donner un exemple où  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$  mais où  $F$  tend vers 0.
3. Montrer que si  $f \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , alors  $F \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 1285** Étudier la fonction :

$$h : x \rightarrow \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$ , éventuellement convexité.

**Exercice 1286** Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u) du$$

existe mais telle qu'on n'ait pas :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Donner un exemple de fonction continue positive telle que :

$$\int_0^\infty f(u) du$$

existe mais telle que :

$$\int_0^\infty f^2(u) du$$

n'existe pas.

**Exercice 1287** Soit  $f$  une fonction positive décroissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $\int_0^\infty f$  existe. Montrer que :

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 1288** Soit  $f$  une application continue par morceaux de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  possédant une limite  $\ell$  en  $+\infty$ , telle que  $\int_0^\infty f$  existe ; montrer que  $\ell = 0$ .

Soit  $f$  une application uniformément continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^\infty f$  existe. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

**Exercice 1289** Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^\infty f^2$  existe. Montrer que quand  $x \rightarrow \infty$  :

$$\int_0^x f(t) dt = o(\sqrt{x}).$$

**Exercice 1290** Étudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

selon  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 1291** Convergence et calcul de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)dt}{t^2},$$

$$\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt,$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^n} dt.$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1292** Soit  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue telle que

$$\int_1^\infty f(t) dt$$

converge. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x t f(t) dt = 0.$$

**Exercice 1293** Soit  $f \in C([1, \infty[, \mathbb{R}^+)$  décroissante, on pose :

$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt.$$

1. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
2. Montrer que la suite  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  a une limite quand  $n \rightarrow \infty$  si et seulement si  $\int_1^\infty f$  converge, et que dans ce cas :

$$\int_{n+1}^\infty f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m f(k) \leq \int_n^\infty f.$$

3. Montrer que si  $\int_1^\infty f$  diverge on a :  $S_n \sim \int_1^n f$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 1294** Soit  $f : ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et monotone, telle que  $\int_0^1 f$  existe. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

**Exercice 1295** Montrer que si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue, alors

$$\int_0^\infty \exp(iff(t)) dt$$

n'existe pas.

**Exercice 1296** Nature de :

$$\int_0^\infty \sin t \sin \frac{1}{t} dt, \int_0^\infty \frac{e^{\sin t}}{t} dt, \int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt, \int_0^1 \cos \ln t dt, \int_0^\infty \cos \exp t dt.$$

**Exercice 1297** Nature et calcul de :

$$\int_0^\infty \ln t \ln \left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt, a > 0 ; \int_0^\infty \exp\left(-t^{\frac{1}{n}}\right) dt, n \in \mathbb{N}^* ; \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$



**Exercice 1298** Convergence et calcul de :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \cosh^2 x}, \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sinh x}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t}.$$

**Exercice 1299** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $f \geq 0, g \geq 0, g = o(f)$  en  $+\infty$ , et  $\int_0^{\infty} f$  n'existe pas. Montrer alors :

$$\int_0^x g(u)du = o\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 1300** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, tendant vers  $\ell$  en  $+\infty$ , montrer alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{f(t)n}{n^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} \ell.$$

**Exercice 1301** Calculer :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan t}{t^2} dt, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n - x^{2n}}{1 - x} dx.$$

**Exercice 1302** Soit  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $\int_{-\infty}^{\infty} f$  existe, montrer que  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos tx dt$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Cinquième partie

# ALGÈBRE 3

## 27 Groupes : généralités

### 27.1 Groupes, sous-groupes

**Exercice 1303** Soit  $ABC$  un triangle équilatéral du plan.

1. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant  $\{A, B, C\}$ .
2. Montrer que c'est un groupe pour la loi  $\circ$ .
3. Faire de même avec un carré.

**Exercice 1304 (Entiers modulo  $n$ )** Étant donné un entier naturel  $n$ , on appelle classe d'un entier relatif  $p$  modulo  $n$  l'ensemble  $\bar{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . L'ensemble des classes modulo  $n$  est noté  $\mathbb{Z}_n$ .

1. Écrire la liste des éléments distincts de  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$  et  $\mathbb{Z}_5$ .
2. Montrer que si  $x \in \bar{p}$  et  $y \in \bar{q}$ , alors  $x + y \in \overline{p+q}$  et  $xy \in \overline{pq}$ .
3. En posant  $\bar{p} + \bar{q} = \overline{p+q}$  et  $\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{pq}$ , on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur  $\mathbb{Z}_n$ .  
Écrire la table d'addition et de multiplication de  $\mathbb{Z}_4$ .

Même question pour  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ , et  $\mathbb{Z}_5$ .

**Exercice 1305** 1. Montrer que les transformations géométriques qui conservent globalement un rectangle forment un groupe. Faire l'étude de ce groupe.

2. Étudier le groupe  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .
3. Montrer qu'il n'existe que deux sortes de groupes à quatre éléments.

**Exercice 1306** 1. Étudier le groupe des isométries du carré.

2. Écrire la liste des éléments du groupe  $\mathfrak{S}_4$  des permutations de quatre lettres. Trouver des sous-groupes de ce groupe isomorphes aux groupes du rectangle, du triangle équilatéral, du carré.

**Exercice 1307 (Permutations d'un ensemble de  $n$  éléments)** 1. Une permutation de l'ensemble de  $n$  éléments  $\{1, 2, \dots, n\}$  est une bijection de cet ensemble dans lui-même.

Il est commode de désigner une telle permutation  $s$  par le tableau de valeurs suivant :

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}. \text{ On note } \mathfrak{S}_n \text{ l'ensemble de ces permutations pour } n \text{ donné.}$$

2. Écrire les éléments de  $\mathfrak{S}_2$  et de  $\mathfrak{S}_3$ .
3. Établir les tables de composition de ces deux ensembles.
4. De la table de  $\mathfrak{S}_3$  on peut extraire des parties *stables* ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes.
5. Voyez-vous des analogies (totales ou partielles) entre ces tables et des situations rencontrées plus haut ?
6. On peut obtenir tous les éléments de  $\mathfrak{S}_3$  à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?

7. Combien d'éléments possède  $\mathfrak{S}_n$ ? Combien de cases contient la table de composition de  $\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_5, \dots$ ? Pourrait-on étudier  $\mathfrak{S}_4$  et  $\mathfrak{S}_5$  à partir de ces tables?

**Exercice 1308** Soient les quatre fonctions de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}^*$

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montre que  $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  est un groupe pour la loi  $\circ$ .

**Exercice 1309** Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3. Est-ce vrai pour 4?

**Exercice 1310** Montrer que si  $X$  contient au moins trois éléments alors  $\sigma(X)$  n'est pas abélien.

**Exercice 1311** Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes?

1.  $] - 1, 1[$  muni de la loi définie par  $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ ;
2.  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  pour la multiplication usuelle;
3.  $\mathbb{R}_+$  pour la multiplication usuelle;
4.  $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$  pour la loi de composition des applications.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1312** Soit  $K = \{\text{Id}, f_1, f_2, f_3\}$  où  $f_1, f_2$ , et  $f_3$  sont les permutations de  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  définies par

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $K$  est un sous-groupe de  $\mathcal{S}_4$ .

**Exercice 1313** Soit l'ensemble

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Montrer que, muni de la multiplication usuelle des matrices,  $\mathcal{J}$  est un groupe abélien.

**Exercice 1314** Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\} ?$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1315** Soit  $G$  un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre à droite et tel que chaque élément de  $G$  admette un symétrique à droite. Montrer que  $G$  est un groupe.

**Exercice 1316** Soient  $(G, \cdot)$  un groupe et  $a, b \in G$ . On suppose que

$$(1) : ab^2 = b^3a \quad \text{et} \quad (2) : ba^2 = a^3b.$$

1. Montrer, en utilisant seulement (1), que  $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$  puis que  $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$ .
2. En déduire, en utilisant (2), que  $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$  et enfin que  $a = b = 1$ .

**Exercice 1317** 1. L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  muni de la loi  $\star$  définie par  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b = a + b + ab$  est-il un groupe ?

2. L'ensemble  $E = \{-1, 1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$  muni de la loi usuelle de multiplication dans  $\mathbb{C}$  est-il un groupe ?
3. L'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$  muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est-il un groupe ?
4. L'ensemble  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques réelles d'ordre 2 muni de la loi de multiplication usuelle des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est-il un groupe ?

**Exercice 1318** Soient  $(G, \star)$  et  $(H, \Delta)$  deux groupes. On définit sur  $G \times H$  la loi  $\heartsuit$  par  $(x, y)\heartsuit(x', y') = (x \star x', y \Delta y')$ .

1. Montrer que  $(G \times H, \heartsuit)$  est un groupe.
2. Si  $G$  est de cardinal 2, dresser la table de  $G \times G$  et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

**Exercice 1319** Montrer que si  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $G$  alors  $H \cap K$  est un sous-groupe de  $G$ . Est-ce vrai pour  $H \cup K$  ?

**Exercice 1320** Si  $G$  est un groupe, on appelle centre de  $G$  et on note  $Z(G)$  l'ensemble  $\{x \in G / \forall y \in G, xy = yx\}$ .

1. Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. Montrer que  $G$  est commutatif ssi  $Z(G) = G$ .
3. Calculer  $Z(\sigma_3)$ .

**Exercice 1321** On nomme  $M_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de taille  $n \times n$  à coefficients entiers relatifs.

- Soit  $M \in M_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que pour que  $M$  admette un inverse élément de  $M_n(\mathbb{Z})$  il faut et il suffit que  $\det(M) \in \{-1, 1\}$ .
- Démontrer que  $Gl_n(\mathbb{Z}) = \{M \in M_n(\mathbb{Z}) ; \det(M) \in \{-1, 1\}\}$  est un sous-groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1322** 1. L'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $ad - bc \neq 0$  et  $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \leq 1$  est-il un sous-groupe de  $Gl_2(\mathbb{R})$  ?

2. L'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$  est-il un sous-groupe de  $Gl_2(\mathbb{R})$  ?

3. Existe-t-il une valeur  $M \in \mathbb{R}$  telle que l'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $ad - bc \neq 0$  et  $a \leq M$  forme un sous-groupe de  $Gl_2(\mathbb{R})$  ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 1323** Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ . Montrer que  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1324** Déterminer le sous-groupe de  $\mathbb{Z}$  engendré par les entiers 24, 36 et  $-54$ .

**Exercice 1325** Les questions sont indépendantes. Soit  $j$  le nombre complexe  $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

1. Déterminer le sous-groupe du groupe additif  $\mathbb{C}$  engendré par  $i$  et  $j$ .
2. Déterminer le sous-groupe du groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$  engendré par  $i$  et  $j$ .

**Exercice 1326** Soit  $G$  un groupe engendré par  $a$  et  $b$ . Montrer que  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \subseteq Z(G)$  où  $Z(G)$  désigne le centre de  $G$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1327** Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .

1. Montrer l'existence de  $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ .
2. Si  $\alpha > 0$  montrer que  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .
3. Si  $\alpha = 0$  montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1328** Soit  $G$  un groupe. Montrer que l'ensemble  $Aut(G)$  des automorphismes de  $G$  est un groupe pour la loi de composition. Soit  $H$  un sous-groupe de  $Aut(G)$ , et  $\pi : G \rightarrow \wp(G)$  définie par :  $\pi(x) = \{f(x) | f \in H\}$ . Montrer que  $\pi(G)$  est une partition de  $G$ .

**Exercice 1329** Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi interne  $\star$ . On appelle translation à droite (resp. à gauche) par  $a \in E$ , l'application  $d_a$  (resp.  $g_a$ ) de  $E$  dans  $E$  définie par  $d_a(x) = a \star x$  (resp.  $g_a(x) = x \star a$ ).

1. Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.
2. Réciproquement, si la loi  $\star$  de  $E$  est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, on va montrer que  $(E, \star)$  est un groupe.
  - (a) Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe un unique élément  $e_x \in E$  (resp.  $f_x \in E$ ) tel que  $e_x \star x = x$  (resp.  $x \star f_x = x$ ).
  - (b) Si  $x, y \in E$ , montrer que  $e_x = e_y$  (noté  $e$  dorénavant) et  $f_x = f_y$  (noté  $f$  dorénavant).
  - (c) Montrer que  $e = f$  (noté  $e$  dorénavant).
  - (d) Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe un unique élément  $\bar{x} \in E$  (resp.  $\bar{\bar{x}} \in E$ ) tel que  $\bar{x} \star x = e$  (resp.  $x \star \bar{\bar{x}} = e$ ).
  - (e) Montrer que  $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ .
  - (f) Conclure.

**Exercice 1330** Si  $K$  est un sous-groupe de  $H$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ , montrer que  $K$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 1331** 1. Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. Montrer l'équivalence de :

- i)  $G$  est abélien.
- ii) Pour tout  $a, b \in G$ , on a :  $(ab)^2 = a^2b^2$ .
- iii) Pour tout  $a, b \in G$ , on a :  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ .
- iv) L'application  $f$  de  $G$  dans  $G$  définie par  $f(x) = x^{-1}$  est un automorphisme.

2. En déduire que si pour tout  $x \in G$ ,  $x^2 = e$ , alors  $G$  est abélien.

**Exercice 1332** 1. Les ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*$  munis des lois  $+$  ou  $\times$  sont-ils des groupes ? Quand c'est le cas, chercher des sous-groupes non triviaux.

2.  $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$  muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

**Exercice 1333** Quel est le plus petit sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  (resp. de  $(\mathbb{R}^*, \times)$ ) contenant 1 ? Contenant 2 ?

**Exercice 1334** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  fixé. Montrer que  $S_\lambda = \{\exp(i\lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, \times)$ . Pour quelles valeurs de  $\lambda$  retrouve-t-on des sous-groupes bien connus ? A quoi ressemblent les courbes  $S_\lambda$  ? Que peut-on dire, en terme de morphisme, de l'application  $t \mapsto \exp(i\lambda t)$  ?

## 27.2 Ordre d'un élément

**Exercice 1335** On appelle *ordre d'un élément* d'un groupe fini  $(G, *)$  l'ordre du sous-groupe engendré dans  $G$  par cet élément.

1. Montrer que si  $x$  est d'ordre  $p$ ,  $p$  est le plus petit entier tel que  $x^p = e$ .
2. Déterminer les ordres des éléments des groupes rencontrés au I.
3. Soit  $(G, *)$  un groupe fini,  $a$  un élément de  $G$ ,  $H$  un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $G$ ; on note  $aH$  l'ensemble  $\{a * y \mid y \in H\}$ .
  - a) Montrer que pour tout  $a \in G$ ,  $aH$  a  $p$  éléments.
  - b) Montrer que si  $a \in G$  et  $b \in G$ ,  $(aH = bH)$  ou  $(aH \cap bH = \emptyset)$ .
  - c) En déduire que l'ordre de  $H$  divise l'ordre de  $G$ .
4. Montrer que si  $G$  est un groupe fini d'ordre  $n$ , les ordres de tous ses éléments divisent  $n$ .
5. Trouver des sous-groupes de  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ .
6. Si  $G$  est un groupe d'ordre 5, que peut-on dire de l'ordre de ses éléments? En déduire les tables de composition possibles pour un groupe d'ordre 5. Que peut-on dire de deux groupes quelconques d'ordre 5? Mêmes questions pour les groupes d'ordre 23. Généraliser.

**Exercice 1336** Soit  $H$  un groupe abélien. Un élément  $x \in H$  est dit d'ordre fini lorsque il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que la somme  $x + \dots + x$  ( $n$ -fois) soit égale à 0. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de  $H$  est un sous-groupe abélien de  $H$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1337** Soit  $G$  un groupe,  $e$  son élément neutre. Un élément  $g$  de  $G$  est dit *d'ordre*  $n \in \mathbb{N}$  si  $g^n = e$  et  $g^k \neq e$  pour tout entier  $k < n$ .  $g$  est dit *d'ordre fini* si il est d'ordre  $n$  pour un  $n$  quelconque.

1. Montrer que  $Gl_2(\mathbb{R})$  contient des éléments d'ordre 2 et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini.
2. Soit  $\varphi$  un homomorphisme de  $G$  à valeurs dans  $H$  et  $g$  un élément de  $G$  d'ordre  $n$ . Montrer que :
  - $\varphi(g)$  est d'ordre fini inférieur ou égal à  $n$ .
  - Si  $\varphi$  est injectif, l'ordre de  $\varphi(g)$  est égal à  $n$ .
3. Montrer que si  $G$  n'a qu'un nombre fini d'éléments, tous ses éléments ont un ordre fini.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1338** Soit le groupe  $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .

1. Déterminer le sous-groupe  $H$  de  $G$  engendré par  $\bar{6}$  et  $\bar{8}$  et déterminer son ordre.
2. Caractériser les générateurs de  $G$ .
3. Quel est l'ordre de l'élément  $\bar{9}$ ?

**Exercice 1339** Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 2 et  $(e_1, e_2)$  une base de  $E$ . On considère les endomorphismes de  $E$  définis par

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2,$$

$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1.$$

1. Montrer que  $r$  et  $s$  sont des automorphismes du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .
2. Déterminer l'ordre de  $s$  et l'ordre de  $r$ .
3. (a) Montrer que  $sr = -rs$ .

(b) En déduire que  $G := \{\text{Id}_E, s, r, sr, -\text{Id}_E, -s, -r, -s\}$  est un sous-groupe du groupe linéaire de  $E$ .

(c) Montrer que  $G$  est le sous-groupe du groupe linéaire  $\text{GL}(E)$  engendré par  $s$  et  $t$ .

**Exercice 1340** Soient  $G$  un groupe et  $x \in G$  un élément d'ordre  $n$ . Quel est l'ordre de  $x^2$ ?  
[Exercice corrigé]

**Exercice 1341** 1. Soient  $G$  un groupe et  $x, y \in G$  des éléments qui commutent et d'ordres respectifs  $m$  et  $n$  premiers entre eux. Montrer que  $xy$  est d'ordre  $mn$ . Montrer que l'hypothèse  $m$  et  $n$  premiers entre eux est indispensable.

2. Montrer que  $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  sont des éléments de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  d'ordres finis et que  $AB$  n'est pas d'ordre fini.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1342** Le groupe  $(\mathbb{Q}, +)$  est-il monogène ?

[Exercice corrigé]

### 27.3 Morphismes

**Exercice 1343** Décrire tous les homomorphismes de groupes de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1344** Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on pose la matrice  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Soit  $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$ . Soit l'application  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}, M_{a,b} \mapsto a^2 + b^2$ .

1. Montrer que  $\mathcal{S}$  est un groupe pour la loi usuelle de multiplication des matrices carrées.

2. Montrer que  $f$  est un morphisme du groupe  $(\mathcal{S}, \times)$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Exercice 1345** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$  l'application qui à tout  $x \in \mathbb{R}$  associe  $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $f$  est un homomorphisme de groupes. Calculer son noyau et son image.  $f$  est-elle injective ?

[Exercice corrigé]

**Exercice 1346** Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :

1.  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$  ;
2.  $\det(MM') = \det(M) \det(M')$  ;
3.  $|zz'| = |z||z'|$  ;
4.  $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$  ;
5.  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$  ;
6.  $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ .

**Exercice 1347** Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{S} = \{M_{a,b} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{M_{0,0}\}$ . Soit l'application  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, M_{a,b} \mapsto a + ib$ .

1. (a) Montrer que  $\mathcal{S}$  est un sous-groupe du groupe additif usuel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(b) Montrer que  $\mathcal{S}^*$  est un sous-groupe multiplicatif de  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

2. Montrer que  $f$  est un isomorphisme du groupe  $(\mathcal{S}, +)$  sur le groupe additif  $\mathbb{C}$ .

3. (a) Montrer que  $f$  définit un homomorphisme du groupe  $(\mathcal{S}^*, \times)$  sur le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ .

(b) Déterminer le noyau et l'image de cet homomorphisme.

4. Montrer que  $\Omega = \{M_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1\}$  est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif  $\mathcal{S}^*$ .

**Exercice 1348** Soit  $G$  un groupe. Montrer que l'application  $x \rightarrow x^{-1}$  est un morphisme si et seulement si  $G$  est commutatif. On suppose  $G$  fini ; soit  $\phi$  un morphisme involutif de  $G$  dont le seul point fixe est  $e$ , montrer que :

$$\forall z \in G, \exists t \in G, z = t(\phi(t))^{-1}.$$

En déduire  $\phi$  puis que  $G$  est commutatif.

## 27.4 Isomorphisme

**Exercice 1349** Montrer que les groupes  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  sont isomorphes.

**Exercice 1350** Montrer que  $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3$  est isomorphe à  $\mathbb{U}_6$ . Est-ce que  $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$  est isomorphe à  $\mathbb{U}_4$  ? Pouvez-vous conjecturer à quelle condition  $\mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$  est isomorphe à  $\mathbb{U}_{nm}$  ?

**Exercice 1351** Soit  $G$  un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de  $G$  muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté  $\text{Aut}(G)$ .
2. Vérifier que l'application  $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  qui associe à  $g \in G$  l'application  $\phi_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$  est un morphisme de groupes. Déterminer son noyau  $Z(G)$ , dit *centre* de  $G$ .
3. Déterminer  $\text{Aut}(\mathbb{Q})$  et  $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ .

**Exercice 1352** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. On appelle conjugaison par  $a \in G$ , l'application  $f_a$  de  $G$  dans  $G$  définie par  $f_a(x) = a.x.a^{-1}$ .

1. Montrer que  $f_a$  est un automorphisme de  $G$ .
2. Soit  $\Gamma = \{f_a : a \in G\}$ . Montrer que  $(\Gamma, \circ)$  est un groupe.
3. Soit  $\Phi : G \rightarrow \Gamma, a \mapsto f_a$ . Vérifier que  $\Phi$  est un morphisme. Est-il injectif ? (indication : préciser ce morphisme lorsque  $G$  est abélien).

**Exercice 1353** 1. Les sous-groupes  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Z}, +)$  sont-ils isomorphes ?

2. Les sous-groupes  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$  sont-ils isomorphes ?

**Exercice 1354** Montrer que les groupes multiplicatifs  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ne sont pas isomorphes. [Exercice corrigé]

## 28 Anneaux et corps

### 28.1 Anneaux

**Exercice 1355** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . L'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto iz - \bar{z}$  est-elle un (endo)morphisme...

1. ...du groupe  $\mathbb{C}$  ?
2. ...de l'anneau  $\mathbb{C}$  ?
3. ...du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  ?



**Exercice 1356** Soient les ensembles

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

Étudier si, munis des lois usuelles,  $L$  et  $M$  sont des anneaux, des corps.

**Exercice 1357** 1. Soit  $D = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = 0\}$ . Montrer que  $D$  n'est pas un idéal de l'anneau  $\mathbb{R}[X]$  et que c'est un sous-anneau de l'anneau  $\mathbb{R}[X]$ .

2. Soit  $E = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = f'(0) = 0\}$ . Montrer que  $D$  n'est pas un sous-anneau de l'anneau  $\mathbb{R}[X]$  et que c'est un idéal de l'anneau  $\mathbb{R}[X]$  dont on donnera un générateur.

**Exercice 1358** On définit sur  $\mathbb{R}$  les deux lois  $\oplus$  et  $\otimes$  par  $x \oplus y = x + y - 1$  et  $x \otimes y = x + y - xy$ . Montrer que  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$  est un corps.

**Exercice 1359** Soit  $(G, +)$  un groupe commutatif. On note  $\text{End}(G)$  l'ensemble des endomorphismes de  $G$  sur lequel on définit la loi  $+$  par  $f + g : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$ .

Montrer que  $(\text{End}(G), +, \circ)$  est un anneau.

**Exercice 1360** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. On dit que  $x \in A$  est nilpotent ssi il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0$ .

1. Montrer que si  $x$  est nilpotent alors  $1 - x$  est inversible.
2. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent, alors  $xy$  et  $x + y$  sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

**Exercice 1361** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau.

On appelle centre de  $A$  l'ensemble  $C = \{x \in A / \forall y \in A, xy = yx\}$ .

Montrer que  $C$  est un sous-anneau de  $A$ .

**Exercice 1362** Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux. On définit sur  $A \times B$  les lois

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

1. Montrer que  $A \times B$  est alors un anneau.
2. Si  $A$  et  $B$  sont des corps, en est-il de même pour  $A \times B$  ?

**Exercice 1363** Montrer que si  $A_1, \dots, A_n$  sont des sous-anneaux de  $A$  alors  $A_1 \cap \dots \cap A_n$  est un sous-anneau de  $A$ .

**Exercice 1364** Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  est un anneau commutatif pour les lois usuelles de  $\mathbb{C}$ .
2. Déterminer les inversibles de  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Exercice 1365** Soit  $A$  un anneau commutatif. On dit que  $a \in A$  est nilpotent s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ . On pose  $\mathcal{N}(A) = \{a \in A : a \text{ est nilpotent}\}$ .

1. Dans cette question,  $A = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ . Montrer que  $\bar{6} \in \mathcal{N}(A)$  puis que  $\mathcal{N}(A) = \{\lambda \bar{6} : \lambda \in \mathbb{Z}\}$ .
2. Que peut-on dire de  $\mathcal{N}(A)$  si  $A$  est intègre ?
3. Montrer que  $\mathcal{N}(A)$  est un idéal de  $A$ .

**Exercice 1366 (Extrait de l'examen de juin 1994)** Sur l'ensemble  $\mathbb{R}^2$ , on définit la loi  $\star$  par

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

1. (a) Montrer que  $(\mathbb{R}^2, +, \star)$  est un anneau commutatif noté  $A$ .  
(b) Chercher les diviseurs de 0 de l'anneau  $A$ .
2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow A, P \mapsto (P(0), P'(0)).$$

- (a) Montrer que  $f$  est un homomorphisme d'anneaux.
- (b)  $f$  est-il surjectif?
- (c) Déterminer le noyau de  $f$ .

**Exercice 1367 (Extrait de l'examen de janvier 1994)** On définit  $A = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Z}\}$  où  $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $\mathcal{U}(A)$  le groupe des éléments inversibles de  $A$  et enfin, on pose, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $N(z) = |z|^2$ .
2. (a) Montrer que si  $z \in A$  alors  $N(z) \in \mathbb{Z}$ .  
(b) Soit  $z \in A$ . Montrer que  $z \in \mathcal{U}(A)$  si et seulement si  $N(z) = 1$ .  
(c) Soient  $a$  et  $b$  des entiers. Montrer que si  $N(a + jb) = 1$  alors  $a, b \in \{-1, 0, 1\}$ .
3. Décrire le groupe  $\mathcal{U}(A)$  et en déterminer les éléments d'ordre 3.
4. Soit  $\Phi : \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}, P \mapsto P(j)$ .  
(a) Montrer que  $\Phi$  est un homomorphisme d'anneaux.  
(b) Déterminer le noyau de  $\Phi$  (on pourra remarquer que  $j^2 + j + 1 = 0$ ).  
(c) Montrer que  $\text{Im } \Phi = \{a + jb : a, b \in \mathbb{Q}\}$  et que c'est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 1368** 1.  $\mathcal{J} = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\}$  est-il un idéal de l'anneau  $\mathbb{Z}^2$  ?

2.  $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$  est-il un idéal de  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 1369 (D'après examen juin 94)** 1. Montrer que  $\bar{k}$  est inversible dans l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si et seulement si les entiers  $k$  et  $n$  sont premiers entre eux.

2. On pose  $n = 10$  et soit  $G$  le groupe des éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- (a) Donner la liste des éléments de  $G$ .
- (b) Quel est l'ordre de  $\bar{3}$ ?  $G$  est-il cyclique?

**Exercice 1370 (Bac 1978)** Soit l'anneau  $A = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ .

1. Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau  $A$ .
2. Résoudre dans  $A$  l'équation  $x^2 + \bar{2}x - \bar{3} = \bar{0}$ .

**Exercice 1371** Soit  $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{Z}[X] : P(0) \in 2\mathbb{Z}\}$ .

1. (a) Montrer que  $\mathcal{J}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[X]$ .  
(b) Montrer que  $\mathcal{J}$  est engendré par les polynômes 2 et  $X$ .
2. En remarquant que  $2 \in \mathcal{J}$ , montrer que l'hypothèse " $\mathcal{J}$  est un idéal principal de  $\mathbb{Z}[X]$ " est absurde.

**Exercice 1372** Montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un anneau principal.

**Exercice 1373** Soit  $A$  un anneau fini commutatif intègre (i.e.  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $y = 0$ ). Montrer que c'est un corps, i.e. que tout élément non nul est inversible.

**Exercice 1374** Soit  $A$  un anneau, on dit que  $x \in A$  est nilpotent si  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0$ .

1. Montrer que si  $x$  est nilpotent alors  $(1 - x)$  est inversible.
2. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent alors  $xy$  et  $x + y$  sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents ?

**Exercice 1375** Soit  $(A, +, \times)$  un anneau commutatif, on dit que  $I \subset A$  est un idéal de  $A$  si et seulement si :  $I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$  et de plus :  $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$ .

1. Quels sont les idéaux de  $\mathbb{Z}$  ?
2. On appelle radical de  $I$ , l'ensemble :

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

Montrer que  $\sqrt{I}$  est un idéal de  $A$  contenant  $I$ . Étudier le cas  $A = \mathbb{Z}$ .

3. Montrer que si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux de  $A$  tels que  $I \subset J$ , alors  $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ . En déduire  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ .
4. Montrer que si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux de  $A$ ,  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ .

**Exercice 1376** Soit  $A$  un anneau commutatif. Un sous anneau  $J$  de  $A$  est nommé idéal de  $A$  lorsque pour tout  $x \in J$  et tout  $a \in A$  le produit  $ax$  appartient à  $J$ .

1. Trouver tous les idéaux d'un corps  $\mathbb{K}$ .
2. Montrer que tout idéal de  $\mathbb{Z}$  est de la forme  $a\mathbb{Z}$ , où  $a \in \mathbb{Z}$ .
3. On note  $D$  l'ensemble des rationnels  $x$  tels que il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $x10^k \in \mathbb{Z}$ . Montrer que tout idéal de  $D$  est de la forme  $aD$  où  $a \in D$ .

## 28.2 Algèbre, Corps

**Exercice 1377** Déterminer les automorphismes du corps  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 1378** Soit  $\sigma$  un automorphisme de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $x \geq 0$  alors  $\sigma(x) \geq 0$ .
2. Montrer que  $\sigma$  est croissante.
3. Déterminer  $\sigma$ .

**Exercice 1379** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MA = AM\}$ .

1. Montrer que  $C$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et en déterminer une base.
2. Montrer que, pour les lois usuelles,  $C$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre.

**Exercice 1380** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = u$ . On définit

$$\mathbb{R}[u] := \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

1. Montrer que, muni des lois usuelles sur  $\mathcal{L}(E)$ , c'est une  $\mathbb{R}$ -algèbre.
2. Montrer que cette algèbre est de dimension finie et discuter de sa dimension en fonction de  $u$ .
3. L'anneau  $\mathbb{R}[u]$  est-il un corps ?

**Exercice 1381** Soit  $M = \{aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$  où  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $J^2$  et montrer que si  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $aI_2 + bJ = O$  alors  $a = b = 0$ .
2. Montrer que, muni des lois usuelles sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $M$  est un anneau. Cet anneau est-il commutatif, intègre ?
3.  $M$  est-il un corps, une  $\mathbb{R}$ -algèbre ?

**Exercice 1382** Montrer que l'ensemble  $S$  des suites réelles convergentes est une  $\mathbb{R}$ -algèbre. L'application  $S \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \lim u$  est-elle un morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres ? L'anneau  $S$  est-il intègre ?

**Exercice 1383** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = u$ . On définit

$$\mathbb{R}[u] = \{a\text{Id}_E + bu : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que, muni des lois usuelles sur  $\mathcal{L}(E)$ , c'est une  $\mathbb{R}$ -algèbre. L'anneau  $\mathbb{R}[u]$  est-il un corps ?

**Exercice 1384** Un automorphisme d'un corps  $\mathbb{K}$  est une application bijective  $\varphi$  de  $\mathbb{K}$  dans lui-même telle que  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(0) = 0$  et, pour tout  $a, b \in \mathbb{K}$ , on ait  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  et  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .

1. Soit  $\varphi$  un automorphisme de  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $x \mapsto \varphi(x)$  est croissante. En déduire que l'identité est le seul automorphisme de  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $\psi$  un automorphisme *continu* de  $\mathbb{C}$ . Montrer  $\psi(x) = x$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire tous les automorphismes *continus* de  $\mathbb{C}$ .

## 29 Groupes finis

### 29.1 Cadre général

**Exercice 1385** 1. On suppose que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(G, *)$  sur  $(G', \diamond)$ . Si  $e$  est l'élément neutre de  $G$ , que peut-on dire de  $\varphi(e)$  ? Si  $x'$  est l'inverse de  $x$  dans  $G$ , que peut-on dire de  $\varphi(x')$  ? Si  $G$  est d'ordre  $n$ , que peut-on dire de l'ordre de  $G'$  ?

2. Pouvez-vous citer des exemples de groupes ? de groupes isomorphes ?
3. Si  $(G, *)$  est un groupe fini et si on établit la table de la loi  $*$ , peut-on rencontrer deux fois le même élément dans la même ligne, dans la même colonne ? Établir les tables de composition possibles pour des groupes à 2, 3, 4 éléments. Pouvez-vous donner des exemples de groupes correspondant à ces tables. Retrouver éventuellement des groupes isomorphes.

**Exercice 1386** Soient  $p$  un nombre premier et  $G$  un groupe d'ordre  $p$ . Montrer que  $G$  est cyclique et donner la liste des générateurs de  $G$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1387** Soit  $G$  un groupe d'ordre  $pn$  avec  $p$  premier.

1. On considère deux sous-groupes  $H$  et  $H'$  de  $G$  d'ordre  $p$  avec  $H \neq H'$ . Montrer que  $H \cap H' = \{e\}$ .
2. En déduire que le nombre d'éléments d'ordre  $p$  dans  $G$  est un multiple de  $p - 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1388** Déterminer (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre 4.

**Exercice 1389** 1. Soit  $G$  un groupe dans lequel tout élément (distinct de l'élément neutre) est d'ordre 2. Montrer que  $G$  est commutatif.

2. Soit  $G$  un groupe d'ordre pair. Montrer que  $G$  contient au moins un élément d'ordre 2.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1390** Montrer que tout morphisme de groupes de  $\mathbb{Q}$  dans un groupe fini  $G$  est trivial.

**Exercice 1391** Soit  $G$  un groupe et  $H$  une partie finie non vide de  $G$ . On suppose que  $H$  est stable pour la loi de  $G$ . Montrer  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 1392** Soit  $G$  un groupe fini de cardinal  $2n$  ( $n \geq 2$ ), possédant 2 sous-groupe  $H$  et  $H'$  tels que :

$$\text{Card}(H) = \text{Card}(H') = n$$

et

$$H \cap H' = \{e\}.$$

1. Montrer que  $G - (H \cup H')$  est un singleton, noté  $\{a\}$ .

2. Soit  $h \in H - \{e\}$ , montrer que  $hH' \subset \{h, a\}$ , en déduire que  $hH' = \{h, a\}$  puis que  $n = 2$ .

3. On écrit  $G = \{a, e, h, h'\}$ , donner la table de  $G$  (puis un exemple d'un tel groupe).

## 29.2 Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**Exercice 1393** Donner la liste des générateurs de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

**Exercice 1394** Soit le groupe  $G$  (additif)  $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$ .

1. Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\overline{12}$  et  $\overline{20}$ . Montrer que  $H$  est le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\overline{4}$  et trouver son ordre.

2. Caractériser les générateurs de  $G$ . Combien en compte-t-on ?

3. Déterminer l'ordre de  $\overline{15}$ .

**Exercice 1395** 1. Montrer qu'il n'existe aucun élément d'ordre 3 dans le groupe  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

2. En déduire les morphismes de groupes de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

**Exercice 1396** Soit  $f$  un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .

1. Montrer que  $f$  est caractérisé par  $f(\overline{1})$ .

2. Déterminer les ordres possibles de  $f(\overline{1})$ .

3. En déduire la liste des morphismes de groupes de  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .

**Exercice 1397** Soit  $G$  le groupe-produit  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ .

1. Donner la liste des éléments de  $G$  et déterminer l'ordre de chacun d'entre eux.  $G$  est-il cyclique ?

2. Donner la liste des sous-groupes de  $G$  et en construire le treillis.

**Exercice 1398** 1. Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = (\overline{n}, \tilde{n})$ .

(a) Montrer que  $f$  est un morphisme de groupes.

(b) Déterminer le noyau de  $f$ .

2. En déduire que les groupes  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$  et  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  sont isomorphes.

**Exercice 1399** Les groupes  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ,  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  et  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  sont-ils isomorphes ?

**Exercice 1400** On note  $R_n$  la rotation du plan de centre  $O$ , d'angle  $2\pi/n$ ,  $S$  la symétrie par rapport à l'axe  $(Ox)$ .

1. Montrer que  $S^2 = id$ ,  $(R_n)^n = id$  et  $R_n S = S R_n^{-1}$ .
2. Montrer que le sous-groupe des isométries du plan engendré par  $R_n$  et  $S$  (ie le plus petit sous-groupe des isométries du plan qui contient  $R_n$  et  $S$ ) est de cardinal  $2n$ . On le note  $D_n$  : c'est le groupe diédral d'ordre  $2n$ .
3. Montrer que  $D_n$  préserve un polygone régulier à  $n$  côtés, centré en  $O$ .
4. En vous aidant de ce qui précède, construire un isomorphisme entre  $D_3$  et  $S_3$ .

**Exercice 1401** Soit  $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} : (z, w) \in \mathbb{C}^2 \right\}$  l'ensemble des quaternions.  $\mathbb{H}^*$  désigne

$\mathbb{H}$  privé de la matrice nulle. On note  $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{H}^*$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ .
2. Montrer que  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$ .
3. En déduire que le sous-groupe de  $\mathbb{H}^*$  engendré par  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  est d'ordre 8. On le note  $H_8$ .
4. Ecrire la table de  $H_8$ .
5. Vérifier que les groupes (tous de cardinal 8)  $H_8$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  et  $D_4$  sont 2 à 2 non isomorphes.

### 29.3 Groupes de permutations

**Exercice 1402** 1. Déterminer  $\text{card}(S_3)$  et écrire tous les éléments de  $S_3$ , puis écrire la table de  $S_3$  et en déduire tous les sous-groupes de  $S_3$ .

2. On considère  $T$  un triangle équilatéral du plan, de sommets  $A, B, C$ .
  - (a) Montrer que les isométries du plan qui préservent  $T$  forment un groupe pour la loi  $\circ$ , que l'on note  $G$ .
  - (b) Montrer qu'un élément de  $G$  induit une permutation de l'ensemble  $\{A, B, C\}$ . On construit ainsi une application  $\phi$  de  $G$  dans  $S_3$ .
  - (c) Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme.

**Exercice 1403** On considère le groupe symétrique  $S_n$ .

1. Déterminer  $\text{card}(S_n)$ .
2. Calculer  $(34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23)$ .
3. Rappel : la permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$  est un cycle de longueur  $k$ , que l'on note  $(a_1 a_2 \dots a_k)$ .  
Si  $\tau \in S_n$ , montrer que  $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1) \tau(a_2) \dots \tau(a_k))$ .
4. Rappel : toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, et cette décomposition est unique à l'ordre près.

Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Rappel : il existe un unique morphisme de  $S_n$  dans  $(\{-1, 1\}, \times)$  non trivial, appelé signature, et noté  $\varepsilon$ . Une manière de calculer  $\varepsilon(\tau)$  (où  $\tau \in S_n$ ) consiste à décomposer  $\tau$  en produit de  $p$  transpositions (ie cycles de longueur 2) : alors  $\varepsilon(\tau) = (-1)^p$ .

Montrer que la signature d'un cycle de longueur  $k$  vaut  $(-1)^{k-1}$ . En déduire comment se calcule la signature d'une permutation à partir de sa décomposition en produit de cycles disjoints.

**Exercice 1404** Comment passer de 1234 à 2314 en échangeant seulement deux chiffres à chaque étape ? Y a-t-il plusieurs façons d'y parvenir ? Même question pour 1234 et 4312. Peut-on obtenir n'importe quelle permutation des chiffres 1234 par ce procédé ?

**Exercice 1405** Représenter graphiquement les permutations suivantes. Les décomposer en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1425376 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2471635 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3261547 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7146253 \end{pmatrix}$$

Calculer la signature des permutations ci-dessus. Calculer le produit  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  et sa signature. Comparer ce résultat aux précédents.

**Exercice 1406** Soient  $a, b, c$  trois éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . Calculer le produit  $(ab)(bc)(ab)$ . En déduire que  $S_n$  est engendré par les permutations  $\{(1, i)\}_{2 \leq i \leq n}$ , c'est à dire que toute permutation s'écrit comme produit de transpositions de cette forme.

Montrer que  $S_n$  est engendré par  $(12)$  et  $(123\dots n)$ .

**Exercice 1407** Décrire tous les morphismes de groupe de  $(S_n, \circ) \rightarrow (\{+1, -1\}, \cdot)$ , c'est les applications  $\phi : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$  satisfaisant :

$$\forall(\sigma, \sigma') \in S_n^2, \quad \phi(\sigma\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma')$$

**Indication** : Commencer par montrer que toutes les transpositions ont même image.

**Exercice 1408** Dans  $\mathbb{R}^n$ , on désigne par  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique. A une permutation  $\sigma \in S_n$ , on associe l'endomorphisme  $u_\sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  suivant :

$$u_\sigma : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \\ x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

1. Soit  $\tau = (ij)$  une transposition. Écrire la matrice de  $u_\tau$  dans la base canonique. Montrer que  $\det(u_\tau) = -1$ .
2. Montrer que  $\forall \sigma, \sigma' \in S_n, u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma \circ \sigma'}$ .
3. En déduire que  $\forall \sigma \in S_n, \det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$  où  $\varepsilon$  désigne la signature.

**Exercice 1409** On note  $S_n$  le groupe symétrique des permutations sur  $n$  éléments.

Soit  $\rho$  un morphisme de groupes de  $(S_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ , c'est à dire une application de  $S_n$  dans  $\{-1, 1\}$  satisfaisant

$$\forall(\sigma, \tau) \in S_n \quad \rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau)$$

1. Calculer  $\rho(\text{id})$ . Pour tout cycle  $\gamma$  de longueur  $p$ , calculer  $\rho(\gamma)$ . En déduire que lorsque  $p$  est impair,  $\rho(\gamma) = -1$ .
2. On suppose que pour toute transposition  $\tau, \rho(\tau) = 1$ . Montrer que  $\forall \sigma \in S_n, \rho(\sigma) = 1$ .
3. On suppose maintenant qu'il existe une transposition  $\tau_0 = (a, b)$  pour laquelle  $\rho(\tau_0) = -1$ .

- (a) Pour un élément  $c \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b\}$ , calculer  $(a, b)(a, c)$ . En déduire que  $\rho(a, c) = -1$ .
- (b) Pour deux éléments distincts  $c$  et  $d$  de  $\{1, \dots, n\}$ , calculer  $(a, c)(a, d)(a, c)$ . En déduire que  $\rho(c, d) = -1$ .
- (c) En déduire que pour toute transposition  $\tau$ ,  $\rho(\tau) = -1$  puis montrer que pour toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,  $\rho(\sigma)$  est la signature de  $\sigma$ .
4. Quels sont tous les morphismes de groupes de  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \cdot)$  ?
5. On considère l'application  $\varphi$  suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &\rightarrow \{-1, 1\} \\ \varphi : \sigma &\mapsto \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

Montrer que  $\forall (\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n$ ,  $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$ .

En déduire que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j},$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  désigne la signature de  $\sigma$ .

**Exercice 1410** Soit  $G$  un groupe d'ordre  $2n$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $n$  ( $H$  est donc d'indice deux dans  $G$ ).

1. Montrer que si  $g \in G$  et  $g \notin H$ , on a  $H \cap gH = \emptyset$  puis que  $G = H \cup gH$ .
2. En déduire que pour tout  $g \in G$ ,  $g^2 \in H$ .
3. On suppose désormais  $G = \mathcal{A}_4$  le groupe des permutations paires de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Soit  $\sigma = (a, b, c)$  un 3-cycle. Montrer que  $\sigma$  peut s'écrire comme le carré d'une permutation paire c'est à dire qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{A}_4$  telle que  $\varphi^2 = \sigma$ . En déduire que  $\mathcal{A}_4$  ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6.

**Exercice 1411** Déterminer tous les éléments  $\sigma \in S_n$  tels que  $\sigma^2 = \sigma$ .

**Exercice 1412** 1. Rappeler  $|S_3|$ . Montrer que  $S_3$  ne contient pas d'élément d'ordre 6.

2. Montrer que  $S_3$  contient un unique sous-groupe d'ordre 3. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de  $S_3$ .
3. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de  $S_3$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1413 (examen juin 1999)** Soit  $GL_2(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles  $2 \times 2$  à coefficients réels.  $GL_2(\mathbb{R})$  est naturellement muni d'une structure de groupe par la multiplication usuelle des matrices. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  appartiennent à  $GL_2(\mathbb{R})$ .
2. Quels sont les ordres de  $A$  et  $B$  ?
3. Montrer que  $AB = -BA$  et en déduire que :
  - (a)  $G = \{I, A, B, AB, -I, -A, -B, -AB\}$  est un groupe (pour la loi multiplicative des matrices ;  $I$  est la matrice identité) ;



(b)  $G$  est le sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  engendré par  $\{A, B\}$ .

4. On munit  $\mathbb{R}^2$  de sa structure euclidienne orientée canonique.

(a) Montrer que  $G$  est inclus dans  $O_2(\mathbb{R})$  (le groupe orthogonal).

(b) Déterminer l'intersection de  $G$  et de  $SO_2(\mathbb{R})$  (le groupe spécial orthogonal).

(c) Déterminer la nature géométrique des 8 éléments de  $G$ .

**Exercice 1414 (examen juin 1999)**

I

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. On définit le centre  $\mathcal{Z}(G)$  de  $G$  par :

$$\mathcal{Z}(G) = \{x \in G / \forall a \in G \quad ax = xa\}.$$

Montrer que  $\mathcal{Z}(G)$  est un sous-groupe de  $G$ .

Que peut-on dire de  $\mathcal{Z}(G)$  si  $G$  est abélien ?

II

On désigne par  $\mathcal{A}_n$  le groupe alterné d'ordre  $n$  (rappel : c'est le sous-groupe de  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  formé des permutations de  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$  de signature  $+1$ .)

On se propose de déterminer le centre de  $\mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 3$ .

1. Donner la liste des éléments de  $\mathcal{A}_3$  et de  $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_3)$ .

2. On suppose désormais  $n \geq 4$ . Dans cette question on fixe  $i, j, k$  trois éléments distincts de  $E_n$ .

(a) Vérifier que le 3-cycle  $(i, j, k)$  est dans  $\mathcal{A}_n$ .

(b) Soit  $s \in \mathcal{S}_n$ , montrer que  $s \circ (i, j, k) = (s(i), s(j), s(k)) \circ s$ .

(c) En déduire que si  $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$  alors l'image de  $\{i, j, k\}$  par  $s$  est  $\{i, j, k\}$ .

3. Pour  $n = 4$ , on note  $E_4 = \{i, j, k, \ell\}$ . Si  $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_4)$  montrer que  $s(\ell) = \ell$ . En déduire  $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_4) = \{\text{id}\}$ .

4. Pour  $n \geq 5$ , soit  $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$ , soit  $i, j, k, \ell, m$  cinq éléments distincts de  $E_n$ . En considérant les ensembles  $\{i, j, k\}$  et  $\{i, \ell, m\}$  montrer que  $s = \text{id}$  et déterminer  $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$ .

**Exercice 1415** Quel est l'ordre maximal d'un élément de  $S_4$ ? De  $S_5$ ? De  $A_5$ ?

**Exercice 1416** On désigne par  $K$  le sous-ensemble  $\{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$  de  $S_4$ .

1. Montrer que  $K$  est un sous-groupe distingué de  $S_4$  et de  $A_4$ .

2. Pour quelle raison  $K$  est-il isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ? Calculer le quotient  $A_4/K$ .

3. Montrer que le quotient  $S_4/K$  est isomorphe à  $S_3$ .

4. Donner un exemple de sous-groupe distingué de  $K$  et non de  $S_4$ . Quelle conclusion peut-on en tirer ?

**Exercice 1417** Calculer  $Z(S_n)$  suivant les valeurs de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 1418** Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de  $\mathcal{S}_{10}$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = (10, 3, 4, 1)(8, 7)(4, 7)(5, 6)(2, 6)(2, 9).$$

Calculer  $\sigma^{1998}$  et  $\varphi^{1998}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1419**  $\mathcal{A}_4$  désigne le groupe des permutations paires sur l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .

1. Quels sont les ordres des éléments de  $\mathcal{A}_4$ ? En déduire la liste de ces éléments sous forme décomposée en produit de cycles à supports disjoints.
2. Montrer que les permutations  $s = (1\ 2)(3\ 4)$  et  $r = (1\ 2\ 3)$  engendrent  $\mathcal{A}_4$ .
3. Montrer que  $\mathcal{A}_4$  admet un unique sous-groupe  $H$  d'ordre 4 (on examinera d'abord les ordres des éléments d'un tel sous-groupe) et que ce sous-groupe est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{A}_4$ .

**Exercice 1420** Le groupe  $G = \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3$  est-il abélien? Déterminer tous les sous-groupes de  $G$  d'ordre 4.

**Exercice 1421** Quel est le nombre de  $k$ -cycles dans  $\mathcal{S}_k$  puis dans  $\mathcal{S}_n$  où  $k \leq n$ ?

**Exercice 1422** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$ .

1. Montrer que si  $G$  est d'ordre impair alors  $G$  ne contient aucune permutation impaire.
2. Montrer que si  $G$  contient au moins une permutation impaire, alors  $G$  contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

**Exercice 1423** Soient  $a = (1, 2)(3, 4)$ ,  $b = (1, 3)(2, 4)$ ,  $c = (1, 4)(2, 3) \in \mathcal{A}_4$ ,  $X = \{a, b, c\}$ ,  $V = \{a, b, c, \text{Id}\}$  et  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}(X)$ ,  $g \in G \mapsto \Phi_g = [x \mapsto gxg^{-1}]$ .

1. (a) Montrer que  $V$  est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{A}_4$  (on pourra étudier l'ordre des éléments de  $\mathcal{A}_4$ ).  
(b) Montrer que  $\langle a \rangle$  est un sous-groupe distingué de  $V$  et n'est pas un sous-groupe distingué de  $\mathcal{A}_4$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est un homomorphisme de groupes.
3. (a) Calculer  $\Phi(g)$  pour  $g = (1, 2)$  puis  $g = (1, 2, 3)$ .  
(b) En déduire que  $\Phi$  est surjectif.
4. Montrer que  $\mathcal{S}_4/V$  est isomorphe à  $\mathcal{S}_3$ .
5. Ecrire la décomposition de  $\mathcal{A}_4$  suivant les classes modulo  $V$ .

**Exercice 1424** 1. Déterminer le centre du groupe  $\mathcal{S}_n$ .

2. (a) Montrer qu'un groupe  $G_1 \times G_2$  contient un sous-groupe distingué isomorphe à  $G_1$ .  
(b) Montrer que les groupes  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{A}_n$  ne sont pas isomorphes si  $n \geq 3$ .

**Exercice 1425** 1. Montrer que dans  $\mathcal{S}_n$  on a  $f \circ (a, b) \circ f^{-1} = (f(a), f(b))$ .

2. Montrer que les permutations  $(1, \dots, n)$  et  $(1, 2)$  engendrent  $\mathcal{S}_n$  (on rappelle que les transpositions engendrent  $\mathcal{S}_n$ ).

**Exercice 1426** 1. Montrer que  $\mathcal{S}_n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathcal{A}_{n+2}$ .

2. Montrer que  $\mathcal{S}_4$  n'est pas isomorphe à un sous-groupe de  $\mathcal{A}_5$ .
3. Montrer que  $\mathcal{S}_5$  n'est pas isomorphe à un sous-groupe de  $\mathcal{A}_6$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1427** Montrer que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$  (groupe symétrique) pour un certain  $n$ .

## 30 Groupes quotients

### 30.1 Sous-groupes distingués

**Exercice 1428** Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes d'ordre fini de  $G$  tels que  $H \cap K = \{e_G\}$ .

1. Montrer que le cardinal de  $HK$  est égal  $|H||K|$ .
2. En déduire que si  $|G| = pq$  où  $p$  est premier et  $p > q$  alors  $G$  a au plus un sous-groupe d'ordre  $p$ . Montrer que si ce sous-groupe existe il est distingué dans  $G$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1429** Soit  $G$  un groupe,  $A$  une partie non vide de  $G$ . On note  $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$  et  $C(A) = \{g \in G; \forall a \in A; gag^{-1} = a\}$ . Montrer que  $N(A)$  et  $C(A)$  sont des sous-groupes de  $G$  et que  $C(A)$  est un sous-groupe distingué de  $N(A)$ .

**Exercice 1430** Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ . On note  $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$ .

1. Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ . En déduire que si  $H$  est distingué dans  $G$  alors  $HK$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. On suppose désormais que  $\forall h \in H, k \in K : hk = kh$ . Montrer que l'application  $f : H \times K \rightarrow G$  définie par  $\forall h \in H, k \in K : f(h, k) = hk$  est un homomorphisme de groupes.
3. Calculer le noyau et l'image de  $f$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit un isomorphisme de groupes.

**Exercice 1431**

1. Soit  $G$  un groupe,  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \forall g \in G : gHg^{-1} \subset H.$$

$$ii) \forall g \in G : gHg^{-1} = H.$$

$$iii) \forall g \in G : gH = Hg.$$

2. En déduire que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

**Exercice 1432** Soient  $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$  et  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Montrer que  $T$  est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $U$  est un sous-groupe distingué de  $T$ .

**Exercice 1433** Soit  $G$  un groupe.

1. Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est distingué si :  $\forall x \in G, xH = Hx$ , ce qui est équivalent à dire que  $H$  est le noyau d'un morphisme de  $G$  dans un groupe. Rappeler la démonstration de cette équivalence.
2. Si  $H$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $G$ , montrer que  $H$  est distingué.
3. Si  $G$  est abélien, montrer que tout sous-groupe de  $G$  est distingué.
4. Le centre de  $G$  est l'ensemble  $Z(G) = \{z \in G : \forall x \in G, xz = zx\}$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe distingué.

## 30.2 Groupes quotients

**Exercice 1434** Soit  $G$  un groupe non réduit à un élément. Un sous-groupe  $M$  de  $G$  est dit *maximal* si le seul sous-groupe de  $G$ , distinct de  $G$  et contenant  $M$ , est  $M$  lui-même. Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que  $6\mathbb{Z}$  n'est pas un sous-groupe maximal de  $\mathbb{Z}$ .  
 (b) Montrer que  $5\mathbb{Z}$  est un sous-groupe maximal de  $\mathbb{Z}$ .
2. On pose  $G := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . Soit  $H_1$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\bar{4}$  et  $H_2$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\bar{2}$ .  
 (a) Expliciter les éléments de  $H_1$  et  $H_2$ .  
 (b) Montrer que  $H_1$  n'est pas un sous-groupe maximal de  $G$  et que  $H_2$  est un sous-groupe maximal de  $G$ .

**Exercice 1435** Déterminer tous les sous-groupes de  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1436** Montrer que le groupe-quotient  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1437** Soit  $G$  le groupe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Si  $q \in \mathbb{Q}$ , on note  $\text{cl}(q)$  la classe de  $q$  modulo  $\mathbb{Z}$ .

1. Montrer que  $\text{cl}(\frac{35}{6}) = \text{cl}(\frac{5}{6})$  et déterminer l'ordre de  $\text{cl}(\frac{35}{6})$ .
2. Montrer que si  $x \in G$  il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$  tel que  $x = \text{cl}(\alpha)$ .
3. Montrer que tout élément de  $G$  est d'ordre fini et qu'il existe des éléments d'ordre arbitraire.

**Exercice 1438** Décrire le groupe-quotient  $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^*$  et montrer qu'il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1439** Montrer que tout quotient d'un groupe monogène est monogène.

**Exercice 1440** Soient  $G$  le groupe-produit  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  et  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $(\bar{3}, \bar{2})$ . Écrire la décomposition de  $G$  suivant les classes à gauche modulo  $H$ . Décrire le groupe-quotient  $G/H$ .

**Exercice 1441** Soit  $G$  un groupe  $Z(G) = \{h \in G; \forall g \in G, gh = hg\}$ .

1. Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .
2. Montrer que si  $G/Z(G)$  est monogène  $G$  est cyclique.

**Exercice 1442** Soit  $G$  un groupe; on note  $D(G)$  le groupe engendré par les éléments de la forme  $ghg^{-1}h^{-1}$ ;  $g, h \in G$ .

1. Montrer que  $D(G)$  est distingué dans  $G$ .
2. Montrer que  $G/D(G)$  est commutatif; plus généralement montrer qu'un sous-groupe distingué  $H$  de  $G$  contient  $D(G)$  si et seulement si  $G/H$  est commutatif.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1443** Soit  $G$  un groupe; on note, pour tout  $g \in G$   $\varphi_g$  l'application  $x \mapsto gxg^{-1}$  de  $G$  dans lui-même et  $\text{Int}(G) = \{\varphi_g; g \in G\}$ .

1. Montrer que  $\text{Int}(G)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Aut}(G)$ .
2. Soit  $f : G \rightarrow \text{Int}(G)$  l'application  $g \mapsto \varphi_g$ . Montrer que  $f$  est un homomorphisme de groupe. Calculer  $\text{Ker}(f)$ .
3. En déduire que  $G/Z(G)$  est isomorphe à  $\text{Int}(G)$ .

**Exercice 1444** Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes de  $G$ . On note  $HK = \{hk; h \in H, k \in K\}$ . On suppose que  $K$  est distingué dans  $G$ .

1. Montrer que  $HK = KH$  et que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$ .
2. Montrer que  $H$  et  $K$  sont des sous-groupes de  $KH$  et que  $K \cap H$  est un sous-groupe distingué de  $H$  et que  $K$  est distingué dans  $KH$ .
3. Soit  $\varphi : H \rightarrow (HK)/K$  la restriction à  $H$  de l'application quotient. Calculer le noyau et l'image de  $\varphi$ . En déduire que les groupes  $H/(K \cap H)$  et  $(HK)/K$  sont isomorphes.

**Exercice 1445** Soit  $G$  un groupe,  $H$  et  $K$  deux sous-groupes distingués de  $G$  avec  $H \subset K$ .

1. Montrer que  $K/H$  est un sous-groupe distingué de  $G/H$ .
2. Montrer que le quotient  $(G/H)/(K/H)$  est isomorphe à  $G/K$ .

**Exercice 1446** Soit  $G$  le sous-groupe de  $Gl(2, \mathbb{R})$  engendré par les matrices  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $AB$ . Calculer  $|H|$ .
2. Montrer que  $H$  est distingué dans  $G$ . Calculer le quotient  $G/H$ ; en déduire  $|G|$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1447** Les questions sont indépendantes.

1. (a) Montrer que l'application  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto 3x + 6y$  est un morphisme de groupes.  
(b) Déterminer le noyau  $\ker f$  de  $f$  et montrer qu'il n'existe pas  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\ker f = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ .  
(c) Montrer que le groupe-quotient  $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(-2, 1)$  est isomorphe au groupe  $3\mathbb{Z}$ .
2. Soit  $G$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$  engendré par  $(2, 0)$  et  $(0, 2)$ . Montrer que le groupe-quotient  $\mathbb{Z}^2/G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1448** 1. Montrer que les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont de la forme  $n\mathbb{Z}$  où  $n \in \mathbb{N}$ . (indication : utiliser la division euclidienne).

2. Rappeler pourquoi ces sous-groupes sont distingués. On peut donc considérer les groupes quotients  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe des racines  $n^{\text{ième}}$  de l'unité.
4. Montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe engendré par un cycle de longueur  $n$  dans  $S_N$  ( $N \geq n$ ).
5. Plus généralement, montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un seul groupe monogène (ie engendré par un seul élément) d'ordre  $n$ , appelé groupe cyclique d'ordre  $n$ .

**Exercice 1449** Rappel : si  $A$  est un anneau (en particulier, si  $A$  est un corps), on note  $GL_n(A)$  l'ensemble des matrices carrées de dimension  $n$  à coefficient dans  $A$ , qui sont inversibles.  $GL_n(A)$  forme un groupe pour la loi  $\times$  de multiplication des matrices, appelé groupe linéaire. Une matrice carrée de dimension  $n$  est dans  $GL_n(A)$  ssi son déterminant est un inversible de l'anneau  $A$  (ce qui revient à dire, lorsque  $A$  est un corps, que son déterminant est non nul).

Pour simplifier, on suppose dans l'exercice que  $A$  est un corps, noté  $\mathbb{K}$ .

1. Montrer que  $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$  est un morphisme de groupes.

2. On note  $SL_n(\mathbb{K}) = \ker(\det)$ . Dire pourquoi  $SL_n(\mathbb{K})$  est un sous-groupe distingué de  $GL_n(\mathbb{K})$  et montrer que  $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$ .
3. Reconnaître  $GL_1(\mathbb{K})$  et  $SL_1(\mathbb{K})$ .
4. Montrer que les matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures) de  $GL_n(\mathbb{K})$  forment un sous-groupe. Sont-ils distingués ?
5. Montrer que  $Z(GL_n(\mathbb{K}))$  est le sous-groupe formé par les homothéties.

## 31 Espaces euclidiens

### 31.1 Produit scalaire, norme

**Exercice 1450** A deux polynômes  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$  et  $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on associe

$$\langle P, Q \rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

**Exercice 1451** Pour quelles valeurs de  $\lambda$  les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2.  $g(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3.  $h(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4.  $i(x, y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3) + (x_2+x_3)(y_2+y_3) - \lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

**Exercice 1452** Vérifier que l'application  $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie ci-dessous est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique qui lui est associée :

$$\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.$$

S'agit-il d'un produit scalaire ?

Vérifier que l'application  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$q((x, y, z)) = x^2 + 3(x + y - z)^2 + (z - y)^2.$$

S'agit-il d'une norme euclidienne ?

**Exercice 1453** Sur  $\mathbb{R}_3[X]$  on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaire.

$$\begin{aligned} \phi(P, Q) &= \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \\ \phi(P, Q) &= \int_{-1}^1 P'(t)Q(t) + P'(t)Q'(t)dt \\ \phi(P, Q) &= \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0) \end{aligned}$$

**Exercice 1454** Pour quelles valeurs de  $\lambda$  les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $f(x, y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$
2.  $g(x, y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$
3.  $h(x, y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$
4.  $i(x, y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3) + (x_2+x_3)(y_2+y_3) - \lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$

**Exercice 1455** Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  appartenant à  $\mathbb{R}^2$ . Pour quelles valeurs de  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  l'application  $f(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$  est-elle un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 1456** Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels tels que  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$ . Montrer l'inégalité :  $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$ . (On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  pour un produit scalaire bien choisi.)

**Exercice 1457** Soient  $x, y$  et  $z$  trois réels tels que  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Montrer que  $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$ .

**Exercice 1458** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non nul,  $\varphi$  un produit scalaire sur  $E$ ,  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .  $\psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\psi(x, y) = a\varphi(x, x) + b\varphi(x, y) + c\varphi(y, y)$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b, c)$  pour que  $\psi$  soit un produit scalaire sur  $E$ .

**Exercice 1459**

1. Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\|\cdot\|$  la norme associée ;  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $v_1, \dots, v_n \in E$ .

Montrer l'inégalité :  $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$ .

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$ . Etudier le cas d'égalité.

**Exercice 1460** Montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\forall (f, g) \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \left( \int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

Soit  $f$  une application continue d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \quad \left( \int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(t)dt.$$

Etudier le cas d'égalité.

**Exercice 1461** Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que pour toute fonction continue d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\left( \int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(t))^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

**Exercice 1462** Soit  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue } 2\pi\text{-périodique}\}$ . Montrer que  $\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Exercice 1463** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que  $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Exercice 1464** Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E$  dans  $E$  qui vérifient :  $\forall (x, y) \in E^2 \langle f(x)|y \rangle = \langle x|g(y) \rangle$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéaires.

**Exercice 1465** Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  des réels positifs. Montrer que  $\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \sum_{k=1}^n b_k^2 c_k$ .

**Exercice 1466** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $x_1, \dots, x_p$  des vecteurs de  $E$  tels que si  $i \neq j$  alors  $\langle x_i|x_j \rangle < 0$ . Montrer par récurrence sur  $n$  que  $p \leq n + 1$ .

**Exercice 1467** Soit  $E$  un espace euclidien, et  $(e_1, \dots, e_n)$  des vecteurs unitaires vérifiant :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale (i.e. une base qui est aussi une famille orthonormale). (NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est  $n$ .)

**Exercice 1468** 1. Montrer que sur  $M_n(\mathbb{R})$  l'application :

$$(A, B) \rightarrow \text{tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire.

2. Soit  $N$  la norme associée, montrer que :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3. Montrer que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}N(A).$$

**Exercice 1469** Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E$  dans  $E$  telles que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

Montrer que  $f$  et  $g$  sont linéaires.

**Exercice 1470** Soit  $E$  un espace euclidien, montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + 1 \leq 2(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2).$$

**Exercice 1471** Soit  $E$  un espace euclidien et  $f : E \rightarrow E$  tel que  $f(0) = 0$  et :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que  $f$  est linéaire.

**Exercice 1472** On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire :

$$(P, Q) \rightarrow \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Existe-t-il  $A \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0) ?$$



**Exercice 1473** Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$ , tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0.$$

Montrer :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y).$$

**Exercice 1474** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme tel que  $\forall x, y \in E$  tels que  $\langle x, y \rangle = 0$ , on ait  $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$ . Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in E$  :  $\|f(x)\| = k\|x\|$ .

## 31.2 Espace orthogonal

**Exercice 1475** Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  de  $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

**Exercice 1476** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que :

1. Si  $F \subset G$  alors  $G^\perp \subset F^\perp$ .
2.  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
3.  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .
4. Si  $\dim(E)$  est finie, alors  $(F^\perp)^\perp = F$ .

## 31.3 Projection, symétrie

**Exercice 1477** Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$ .

En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension  $n$ , on considère un sous-espace  $F$  de dimension  $r$  et  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de orthonormée de cet espace. On not  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ , c'est à dire la projection sur  $F$  associée à la décomposition  $E = F \oplus F^\perp$ . Montrer que :

$$\forall v \in F, \quad p_F(v) = \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, f_2 \rangle f_2 + \dots + \langle v, f_r \rangle f_r$$

**Exercice 1478** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + y + z = 0$  de  $(1, 0, 0)$ , et plus généralement d'un vecteur  $(x, y, z)$  quelconque.

Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Dans un espace euclidien de dimension  $n$ , on considère un sous-espace  $F$  de dimension  $r$  et  $(f_1, \dots, f_r)$  une base de orthonormée de cet espace. On not  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ , c'est à dire la projection sur  $F$  associée à la décomposition  $E = F \oplus F^\perp$ . Montrer que :

$$\forall v \in F, \quad p_F(v) = \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, f_2 \rangle f_2 + \dots + \langle v, f_r \rangle f_r$$

**Exercice 1479** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $p$  est orthogonal (c'est-à-dire  $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$ ) si et seulement si :  $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**Exercice 1480** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$  et on pose, pour tout  $x \in E$  :  $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ . Soit  $z \in F$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in F$ , les trois conditions sont équivalentes :

(i)  $d(x, F) = \|x - z\|$ .

(ii)  $z = p(x)$ .

(iii)  $\forall y \in F, y \perp (x - z)$ .

2. En déduire  $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$ .

**Exercice 1481** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient  $x$  et  $y \in E$ . Montrer que :

1. Si  $\|x\| = \|y\|$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $y = s(x)$  où  $s$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .

2. Si  $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $y = p(x)$  où  $p$  est la projection orthogonale sur  $H$ .

**Exercice 1482** Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$ . Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

**Exercice 1483** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_m)$ . Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

1. Montrer que  $\forall x \in E, p(x) = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i$ .

2. Donner de même l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  et la projection orthogonale sur  $F^\perp$ .

**Exercice 1484** Quelle est la transformation de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} ?$$

**Exercice 1485** Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  de la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(v_1, v_2)$  où  $v_1 = (1, -1, 0, 0)$  et  $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ .

**Exercice 1486** Soient  $E$  un espace euclidien,  $u$  un vecteur non nul et  $H = u^\perp$ . Soient  $p$  la projection orthogonale sur  $H$  et  $s$  la symétrie orthogonale par rapport à  $H$ .

1. Montrer que  $\forall x \in E \quad p(x) = x - \frac{\langle x|u \rangle}{\|u\|^2} u$ .

2. Montrer que  $\forall x \in E \quad s(x) = x - 2 \frac{\langle x|u \rangle}{\|u\|^2} u$ .

3. On considère dans  $\mathbb{R}^3$  le plan  $(\Pi : x - y + z = 0)$ . Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à  $\Pi$ .

**Exercice 1487** Soit  $(E, |)$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

1. Soient  $F$  et  $G$  des sous-espace vectoriels de  $E$ . Montrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

2. Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  et  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  d'équation cartésienne  $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$  dans  $\mathcal{B}$ .

(a) Déterminer l'orthogonale de  $H$ .

(b) Déterminer la distance du vecteur  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  de  $E$  au sous-espace vectoriel  $H$ .

3. Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  défini par

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0.$$

(a) Déterminer une base de  $P^\perp$  puis une base orthonormale de  $P^\perp$ .

(b) En déduire une expression analytique de la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^4$  sur  $P$ .

**Exercice 1488** Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$  et  $p$  le projecteur de  $E$  d'axe  $F$  et de direction  $G$ .

1. On suppose que  $F \perp G$ . Montrer que  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

2. On suppose que  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

(a) Soient  $a \in F$  et  $b \in G$ . Montrer que  $\|a + b\| \geq \|a\|$ .

(b) En déduire que  $F \perp G$ .

**Exercice 1489** Soit  $\alpha = \inf \left\{ \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c - |x|)^2 dx : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Déterminer un espace vectoriel euclidien  $(E, | \cdot |)$ , un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  et  $v \in E$  tel que  $\alpha = d(v, F)^2$ .

2. Déterminer  $p \in F$  tel que  $\alpha = d(v, p)^2$  et  $\alpha$ .

**Exercice 1490** Soit  $E$  un espace euclidien (de dimension finie),  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Déterminer  $(F + G)^\perp$  et  $(F \cap G)^\perp$  en fonction de  $F^\perp$  et  $G^\perp$ .

**Exercice 1491** Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$ .

**Exercice 1492** Calculer :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln x - ax - b|^2 dx.$$

### 31.4 Orthonormalisation

**Exercice 1493** Résoudre l'équation  $(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$  pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1494**

1. Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^5$  engendré par  $u = (1, 2, 3, -1, 2)$  et  $v = (2, 4, 7, 2, -1)$ . Trouver une base de l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$ .

2. Trouver une base orthonormale du sous-espace  $E$  de  $\mathbb{C}^3$  engendré par  $v_1 = (1, i, 0)$  et  $v_2 = (1, 2, 1 - i)$ .

**Exercice 1495** Soit  $F$  un sous-espace d'un espace euclidien  $E$ . Montrer qu'il existe une base orthonormale de  $F$  qui est incluse dans une base orthonormale de  $E$ .

**Exercice 1496**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  définit un produit scalaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Construire une base orthonormale pour  $\varphi$ .

2. Considérons une base  $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer  $\{v_i\}$  en une base orthonormale.

**Exercice 1497** Soient  $E = \mathbb{R}_n[X], I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

1. Montrer que l'intégrale  $I_n$  est convergente. Que vaut  $I_{2p+1}$  ?

Soit  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

2. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.

3. On suppose  $n = 2$ . Ecrire la matrice associée à  $\varphi$  dans la base  $(1, X, X^2)$ . Construire une base orthonormale  $(P_0, P_1, P_2)$  par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à  $(1, X, X^2)$ .

**Exercice 1498** Réduire en somme de carrés indépendants les formes suivantes :

1.  $9x^2 - 6y^2 - 8z^2 + 6xy - 14xz + 18xw + 8yz + 12yw - 4zw$
2.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$

**Exercice 1499**  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 1)$ ,  $e_2 = (1, 0, 2)$  et  $e_3 = (1, 1, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

**Exercice 1500**  $\mathbb{R}^4$  est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient  $e_1 = (1, 0, 1, 0)$  et  $e_2 = (1, -1, 1, -1)$  et  $F = \text{vect}(e_1, e_2)$ .

1. Déterminer une base orthonormale de  $F$ .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  du projecteur orthogonal sur  $F$ .
3. Déterminer la distance du vecteur  $(1, 1, 1, 1)$  au sous-espace vectoriel  $F$ .

**Exercice 1501** On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  du produit scalaire défini par

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer la distance du polynôme  $P = X^2 + X + 1$  au sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  formé des polynômes  $f$  tels que  $f'(0) = 0$ .

**Exercice 1502** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la manière suivante : si  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  alors

$$f(u, u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que  $f$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne  $2x - y + z = 0$ .
  - (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel  $P$ .
  - (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dont l'orthogonal est  $P$ .
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  pour le produit scalaire  $f$ .

**Exercice 1503** Orthonormaliser dans  $\mathbb{R}^3$  la famille  $x_1 = (1, -2, 2)$ ,  $x_2 = (-1, 0, -1)$ ,  $x_3 = (5, -3, 7)$ .

**Exercice 1504** Déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ .

**Exercice 1505** On considère la forme bilinéaire  $b$  de  $\mathbb{R}^4$  définie par :

$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

où  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$  sont les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans la base canonique.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Ecrire la matrice de  $b$  dans la base canonique.

3. Trouver une base orthonormée pour  $b$ .

**Exercice 1506** On considère un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**1. Théorème de Pythagore :**

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs orthogonaux de  $E$ . Calculer  $\|u + v\|^2$ . Illustrer le résultat obtenu à l'aide d'un dessin.

**2. Projection orthogonale et distance à un sous-espace :**

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$ . On rappelle que  $E = F \oplus F^\perp$ , et donc que tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique en une somme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in F^\perp$ . Le vecteur  $x_1$  s'appelle alors la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ .

(a) Montrer que l'application  $p$  qui à un vecteur associe sa projection orthogonale sur  $E$  est une application linéaire. Vérifier que :  $\forall y \in F, \langle x - p(x), y \rangle = 0$ .

(b) On considère maintenant un vecteur  $x$  de  $E$ . On appelle distance de  $x$  à  $F$  le nombre  $\text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ .

Pour  $y \in F$ , vérifier que  $x - p(x)$  et  $y - p(x)$  sont orthogonaux. Utiliser alors la question 1 pour montrer que  $\|x - y\|^2 \geq \|x - p(x)\|^2$ . Illustrer sur un dessin.

En déduire que  $\text{dist}(x, F) = \|x - p(x)\|$ .

(c) Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base orthonormée de  $F$ . Montrer que  $p(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i$ .

**3. Espace de polynômes :**

Sur l'espace  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on considère la forme bilinéaire définie par :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire (on admet que l'intégrale sur  $[-1, 1]$  d'une fonction  $f$  continue et positive est nulle si et seulement si  $f$  est nulle sur  $[-1, 1]$ )

(b) A l'aide du procédé de Schmidt appliqué à la base  $(1, X, X^2)$ , construire une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.

(c) On considère le polynôme  $P_0 = X^3$ . Calculer la projection orthogonale de  $X^3$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . En déduire que pour ce produit scalaire, on a :

$$\text{dist}(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$

**Exercice 1507** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $x_0$  un point de  $E$  et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . On note  $\pi$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $F$ . On rappelle que pour  $x \in E$ ,  $\pi(x)$  est caractérisé par les relations :

$$\pi(x) \in F \quad \text{et} \quad x - \pi(x) \in F^\perp$$

Le but de cette partie est de montrer que la projection orthogonale de  $x_0$  sur  $F$  est le point de  $F$  le plus proche de  $x_0$ .

1. En utilisant que  $x_0 - y = (x_0 - \pi(x_0)) + (\pi(x_0) - y)$ , montrer que

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2 + \|y - \pi(x_0)\|^2.$$

2. En déduire que  $\inf_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$ , c'est à dire que :

$$\forall y \in F, \|x_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - \pi(x_0)\|^2$$

A quelle condition a-t-on égalité dans la relation ci-dessus ?

3. Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base orthonormée de  $F$ . Montrer que  $\pi(x_0) = \sum_{i=1}^k \langle e_i, x_0 \rangle e_i$
4. Dédire des deux questions précédentes que

$$\inf_{y \in F} \|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \sum_{i=1}^k \langle e_i, x_0 \rangle e_i\|^2 = \|x_0\|^2 - \sum_{i=1}^k \langle e_i, x_0 \rangle^2$$

Application : Le but est maintenant de déterminer

$$\alpha = \inf_{a, b \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at - b)^2 dt.$$

On considère à cet effet l'espace  $F = \mathbb{R}_1[X]$ , comme sous espace de  $E = F \oplus \mathbb{R}f_0$  où  $f_0$  est la fonction définie par  $f_0(t) = e^t$ . On admettra sans démonstration que  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .

5. Donner une base orthonormée  $(P_1, P_2)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$  pour ce produit scalaire.
6. Calculer  $\langle f_0, P_1 \rangle$ ,  $\langle f_0, P_2 \rangle$ , et  $\|f_0\|^2$ . En déduire que

$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - (2e^{-1})^2 - \left(\frac{e - e^{-1}}{2}\right)^2.$$

7. Même question avec le calcul de  $\alpha' = \inf_{a, b, c \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt$ . : commencer par chercher une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour le même produit scalaire, et en déduire  $\alpha'$ .

**Exercice 1508** A deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1. Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Lorsque  $n = 2$ , donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

### 31.5 Formes quadratiques

**Exercice 1509** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel (où  $K$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de dimension finie  $n > 0$  et  $q$  une forme quadratique sur  $E$ .

1.  $q$  peut-elle être injective ?
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $q$  pour qu'elle soit surjective.

**Exercice 1510 (examen juin 1999)** Soit  $a$  un nombre réel. Soit  $q$  la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour  $v = (x, y, z)$ . Soit  $f$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $q$ .

1. Déterminer une décomposition de  $q$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de  $q$  suivant les valeurs de  $a$ .
3. Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $f$  définit-elle un produit scalaire ?

**Exercice 1511** Soit  $q$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Donner l'expression analytique de  $q$  dans  $\mathcal{B}$  et expliciter sa forme polaire  $f$ .
2. Vérifier que  $\mathcal{B}' = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$  est une base  $\mathbb{R}^3$  et donner la matrice de  $q$  dans cette base. Expliciter  $q$  dans cette base.
3. Trouver le rang et la signature de  $q$ .

**Exercice 1512** Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $q$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $q(P) = P(0)P(1)$ .

1. (a) Montrer que  $q$  est une forme quadratique sur  $E$ .  
(b) Déterminer la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $E$ .  
(c) La forme  $q$  est-elle positive, négative?
2. Soit  $P := X^2 + X + 1$  et  $V = \text{vect}(P)$ . Déterminer  $V^\perp$  et  $V^{\perp\perp}$ .
3. Déterminer le rang de  $q$  puis son noyau.
4. Déterminer le cône isotrope  $C(q)$  de  $q$  et construire une base de  $E$  formée de vecteurs isotropes.  $C(q)$  est-il un sous-espace vectoriel de  $E$ ?
5. Déterminer une base  $(P_0, P_1, P_2)$  de  $E$  telle que  $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$  et donner la signature de  $q$ .

**Exercice 1513** Soit  $q$  une forme quadratique sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ , que l'on suppose définie (*i.e.* son cône isotrope est  $\{0\}$ ). Montrer que  $q$  garde un signe constant sur  $E$  (on pourra raisonner par l'absurde et considérer  $q(a+tb)$  où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs bien choisis et  $t \in \mathbb{R}$ ).

**Exercice 1514** 1. Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $q$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Utiliser la question précédente pour trouver une base  $q$ -orthogonale, déterminer la signature de  $q$  et une décomposition de  $q$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

**Exercice 1515** Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y - z)^2 - (3x - y + 2z)^2 + (5y - 7z)^2.$$

**Exercice 1516** Soit la forme quadratique  $q$  définie par

$$q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mapsto x_1x_2 + x_2x_4 - x_3x_4 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - x_1x_3.$$

1. Montrer, sans réduire  $q$ , qu'il existe une base  $q$ -orthonormale de  $\mathbb{C}^4$ .
2. En expliciter une.

## 32 Endomorphismes particuliers

### 32.1 Endomorphismes du plan

**Exercice 1517** Dessiner l'allure du Shaddock ci dessous après qu'il ait subi l'action de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice de la dernière transformation dans la base  $((2, 1), (-1, 1))$ .

**Exercice 1518** Retrouver la matrice (dans la base indiquée sur le premier dessin) de la transformation subie par chacun des Shadocks ci-dessous.

### 32.2 Dualité

**Exercice 1519** On considère l'application suivante :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

Montrer que  $\alpha$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\alpha_i$  l'application

$$\alpha_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(i/n) \end{array}$$

Montrer que  $\alpha_i$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , et montrer que la famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]^*$ .

En déduire que :

$$\exists(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(i/n)$$

**Exercice 1520** On considère l'application  $u$  suivante :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Calculer  ${}^t u(\alpha)$  lorsque :

$$\alpha : P \mapsto P(0) \qquad \alpha : P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

**Exercice 1521** On appelle *trace* d'une matrice  $A$ , et on note  $\text{tr}(A)$ , la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que l'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \text{tr}(A) \end{array}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que :  $\forall(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . En déduire que deux matrices semblables ont même trace.
3. Existe-t-il deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB - BA = I$  ?

**Exercice 1522** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } {}^t f$ .

En déduire que  $f$  est surjective si et seulement si  ${}^t f$  est injective.

Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dimension finies, montrer que  $\text{rg}(f) = \text{rg}({}^t f)$ . En déduire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  on a  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t(A))$ .



**Exercice 1523** Soit  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f^2 = 0$ . Montrer qu'il existe  $\alpha \in (\mathbb{R}^3)^*$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \alpha(x)v.$$

(Indication : commencer par montrer que  $\text{rg}(f) \leq 1$ )

**Exercice 1524** On considère un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On rappelle que l'adjoint  $u^*$  d'un endomorphisme  $u$  est l'endomorphisme caractérisé par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est une similitude de  $E$  si et seulement si  $u$  est la composée d'une homotétie et d'une isométrie, c'est à dire si et seulement si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists v \in O(E) / u = \alpha v.$$

1. Redémontrer l'équivalence entre les trois caractérisations suivantes des isométries :

$$\begin{aligned} v \text{ est une isométrie} &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \|v(x)\| = \|x\| \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle v(x), v(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Leftrightarrow v^*v = \text{id} \end{aligned}$$

On veut montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(i)  $u$  est une similitude

(ii) il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que

$$u^*u = \lambda \text{id}$$

(iii)  $u$  conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

2. Montrer que (i)  $\Rightarrow$  (ii), puis que (ii)  $\Rightarrow$  (i).

3. Montrer que (i)  $\Rightarrow$  (iii).

4. On suppose (iii).

(a) Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . Montrer que

$$\forall y \in E \quad x \perp y \Leftrightarrow u^*u(x) \perp y$$

(b) En déduire que  $u^*u(x)$  appartient à la droite engendrée par  $x$ . On note  $\lambda_x$  le réel tel que  $u^*u(x) = \lambda_x x$ .

(c) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_{tx} = \lambda_x$

(d) Montrer que, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs linéairement indépendants de  $E$ , on a :  $\lambda_x = \lambda_y$ .

(e) En déduire que l'application  $x \mapsto \lambda_x$  est constante. Conclure.

### 32.3 Endomorphismes auto-adjoints

**Exercice 1525** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $p$  est orthogonal si et seulement si  $p = p^*$ .

**Exercice 1526** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que si  $\varphi = \varphi^*$  et  $\varphi(F) \subset F$  alors  $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$ .
2. Soit  $F$  un espace propre de  $\varphi$ . Montrer que si  $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$  alors  $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$ .

**Exercice 1527** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques positives. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que tout vecteur propre de  $A^k$  est vecteur propre de  $A$ .
2. Si  $A^k = B^k$  alors  $A = B$ .
3. Que se passe-t-il sans l'hypothèse  $A$  et  $B$  symétriques positives ?

**Exercice 1528** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\varphi^* \circ \varphi$  est symétrique et que  $\text{Sp}(\varphi^* \circ \varphi) \subset \mathbb{R}_+$ .
2. On note respectivement  $\lambda$  et  $\mu$  la plus grande et la plus petite valeur propre de  $\varphi^* \circ \varphi$ . Montrer, pour tout  $x \in E$ , l'inégalité :

$$\mu \|x\|^2 \leq \|\varphi(x)\|^2 \leq \lambda \|x\|^2.$$

**Exercice 1529** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que si  $\varphi = \varphi^*$  et  $\forall x \in E : \langle x, \varphi(x) \rangle = 0$  alors  $\varphi = 0$ .
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - i)  $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ .
  - ii)  $\forall x, y \in E : \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle$ .
  - iii)  $\forall x \in E : \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$ .
3. Si  $\dim(E) = 2$  et si  $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$  alors la matrice de  $\varphi$  dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $b \neq 0$ .
4. On suppose désormais que  $\dim(E) = 3$  et que  $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  a au moins une valeur propre réelle qu'on notera  $\lambda$ . Montrer que  $E_\lambda$  et  $E_\lambda^\perp$  sont laissés stables par  $\varphi$  et  $\varphi^*$ .
  - (b) Montrer que si  $\varphi$  n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée  $\varepsilon$  de  $E$  et deux

$$\text{réels } a \text{ et } b \text{ (avec } b \neq 0) \text{ tels que } \text{Mat}(\varphi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1530** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  une base orthonormée de  $E$ . Soient  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  et  $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$  deux vecteurs de  $E$ . Calculer  $\langle x, y \rangle$  en fonction des coefficients  $x_i$  et  $y_i$  (pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ).
2. On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme auto-adjoint. On note  $\lambda$  sa plus petite valeur propre et  $\lambda'$  sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout  $x$  appartenant à  $E$ , les inégalités :

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda' \|x\|^2.$$

(On utilisera une base orthonormée convenable.)

3. Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme quelconque. Montrer que  $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$  est auto-adjoint. Soient  $\mu$  une valeur propre de  $v$ ,  $\lambda$  la plus petite valeur propre de  $u$  et  $\lambda'$  la plus grande valeur propre de  $u$ . Montrer que  $\lambda \leq \mu \leq \lambda'$ .

**Exercice 1531**

1. Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $S = {}^tA \cdot A$  est une matrice symétrique dont tous les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont positives. Démontrer l'égalité :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$ .
  2. Soit  $S \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Existe-t-il une matrice  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tA \cdot A$ ? Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $S$  pour que  $A$  soit inversible.
- Application à  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1532** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $p$ . A chaque  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments de  $E$  on associe le nombre (déterminant de Gram)

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{i, j=1, \dots, n}.$$

1. Montrer que  $x_1, \dots, x_n$  sont liés si et seulement si  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ ; montrer que si  $x_1, \dots, x_n$  sont indépendants, on a  $G(x_1, \dots, x_n) > 0$ .
2. Montrer que, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a  $G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n)$ , et que la valeur de  $G(x_1, \dots, x_n)$  n'est pas modifiée si l'on rajoute à un des vecteurs, soit  $x_i$ , une combinaison linéaire des autres vecteurs  $x_j (j \neq i)$ . Calculer  $G(\alpha x_1, \dots, x_n)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).
3. On suppose  $x_1, \dots, x_n$  indépendants. Soit  $x \in E$ , et soit  $d(x, H)$  la distance de  $x$  à l'hyperplan  $H = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . Montrer que  $d(x, H)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}$ .

**Exercice 1533** Diagonaliser très rapidement la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

**Exercice 1534** Montrer que l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$  de matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

$$C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme orthogonal.

**Exercice 1535** Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit  $x \in E$  tel que  $f^*(x) = x$ . Montrer que  $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$ .  
(b) En déduire que  $\ker(f^* - \text{Id}) \subseteq \ker(f - \text{Id})$ .
2. Soit  $h$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $(\text{Im } h)^\perp \subseteq \ker h^*$ .
3. En déduire que les sous-espace vectoriels  $\ker(f - \text{Id})$  et  $\text{Im}(f - \text{Id})$  sont supplémentaires et orthogonaux.

**Exercice 1536** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 3.

1. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormée de  $E$ . Soient  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  et  $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$  deux vecteurs de  $E$ . Calculer  $\langle x, y \rangle$  en fonction des coefficients  $x_i$  et  $y_i$  (pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ).

2. On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme auto-adjoint. On note  $\lambda_1$  sa plus petite valeur propre et  $\lambda_2$  sa plus grande valeur propre. Montrer que l'on a, pour tout  $x$  appartenant à  $E$  les inégalités :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_2 \|x\|^2.$$

(On utilisera une base orthonormée convenable.)

3. Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme quelconque. Montrer que  $u = \frac{1}{2}(v + v^*)$  est auto-adjoint. Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $v$ ,  $\lambda_1$  la plus petite valeur propre de  $u$  et  $\lambda_2$  la plus grande valeur propre de  $u$ . Montrer que  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ .

**Exercice 1537** 1. Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique positif. Montrer que si  $x \in E$  alors  $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ .

2. Soit  $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique positive. Montrer que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $m_{ii} \geq 0$  et  $\text{tr}(M) \geq 0$

3. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques positives.

(a) Montrer qu'il existe  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique positive telle que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(DM)$ .

(b) En déduire que  $\text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ .

**Exercice 1538** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle \geq 0$ .
2. Il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f = g^*g$ .
3. Il existe  $h \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $h = h^*$  et  $f = h^2$ .

**Exercice 1539** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. Montrer que  $\|f\| = \|f^*\|$ .

**Exercice 1540** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien (de dimension finie) et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme autoadjoint. On note  $X = \{x \in E; \langle f(x), x \rangle \leq 1\}$ . Montrer que  $X$  est compacte si et seulement si toutes les valeurs propres de  $f$  sont strictement positives.

### 32.4 Autres endomorphismes normaux

**Exercice 1541** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Un endomorphisme  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  est dit antisymétrique lorsque  $\varphi^* = -\varphi$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est antisymétrique si et seulement si  $\forall x \in E, \langle \varphi(x), x \rangle = 0$ . (on pourra remarquer que  $\varphi + \varphi^*$  est autoadjoint.)
2. Montrer que si  $\varphi$  est antisymétrique alors  $(\text{Ker}(\varphi))^\perp = \text{Im}(\varphi)$  puis que  $\text{rg}(\varphi)$  est pair.

**Exercice 1542** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme antisymétrique c'est-à-dire tel que  $\varphi^* = -\varphi$ .

1. Montrer que si  $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$  alors  $\lambda = 0$ . Montrer que  $(\text{Ker}(\varphi))^\perp$  est stable par  $\varphi$ .
2. (a) Montrer que  $\varphi^2$  est symétrique.  
 (b) Montrer que si  $x$  est un vecteur propre associé à une valeur propre  $\mu$  de  $\varphi^2$  alors  $E_x = \text{vect}\{x, \varphi(x)\}$  et  $E_x^\perp$  sont laissés stables par  $\varphi$ .  
 (c) Montrer que  $\mu > 0$ . Déterminer une base  $\{e_1, e_2\}$  de  $E_x$  telle que la matrice de la restriction de  $\varphi$  à  $E_x$  dans  $\{e_1, e_2\}$  soit  $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix}$ .
3. Montrer que  $E$  est somme directe orthogonale de  $\text{Ker}(\varphi)$  et de plans stables.

### 32.5 Endomorphismes orthogonaux

**Exercice 1543** Soit  $f$  une transformation orthogonal d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f - \text{id})^\perp$$

En déduire que si  $(f - \text{id})^2 = 0$ , alors  $f = \text{id}$ .

**Exercice 1544** Déterminer la nature des transformations de  $\mathbb{R}^3$  dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1545** Diagonaliser dans une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ ) la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpréter géométriquement la transformation de  $\mathbb{R}^3$  représentée par cette matrice.

**Exercice 1546** Diagonaliser les matrices suivantes dans des bases orthonormées :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 1 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3i \\ 3i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1547** Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice symétrique réelle. Montrer que ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vérifient

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$$

**Exercice 1548** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonal d'un espace euclidien  $E$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  conserve l'orthogonalité de  $\mathcal{B}$  si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille orthogonale.

Montrer que  $f$  conserve l'orthogonalité de  $\mathcal{B}$  si et seulement si  $\mathcal{B}$  est une base de vecteurs propres de  ${}^t f f$ .

Montrer que pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , il existe une base orthogonale dont  $f$  conserve l'orthogonalité.

**Exercice 1549 (Décomposition polaire)** 1. Soit  $r$  un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ . On dit que  $r$  est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives.

Montrer que si  $r$  est défini positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique  $s$  positif tel que  $s^2 = r$ . On appelle  $s$  racine carrée positive de  $r$ .

On dit que  $r$  est défini positif si et seulement si toutes ses racines sont strictement positives.

Montrer que si  $r$  est défini positif, alors sa racine positive aussi.

2. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  ${}^t f f$  est symétrique et positif. Montrer que si en plus  $f$  est bijective,  ${}^t f f$  est défini positif.

3. On suppose maintenant que  $f$  est une bijection. Soit  $s$  la racine carrée positive de  ${}^t f f$ . Montrer que  $u = f \circ s^{-1}$  est une transformation orthogonale. En déduire que tout endomorphisme bijectif de  $E$  peut se mettre sous la forme :

$$f = u \circ s$$

où  $u$  est une transformation orthogonale, et  $s$  est symétrique défini positif.

Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de  $f$  est unique.

4. Que se passe-t-il si  $f$  n'est pas bijective ?

**Exercice 1550** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{attention au } \frac{1}{7} \dots)$$

1. Sans calculs, dire pourquoi  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée.
2. Montrer que  $f$  est orthogonal. En déduire les seules valeurs propres possibles pour  $f$ .
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de  $f$ , déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de  $f$ . En déduire le polynôme caractéristique de  $f$ .
4. Déterminer l'espace propre  $E_1$  associé à la valeur propre 1. En donner une base, puis lui appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de  $E_1$ .
5. Montrer que l'espace propre  $E_{-1}$  associé à la valeur propre -1 satisfait  $E_{-1} = (E_1)^\perp$ . En utilisant l'équation caractérisant  $E_1$ , en déduire un vecteur générateur de  $E_{-1}$ .
6. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale. Donner une interprétation géométrique de  $f$ .

**Exercice 1551 A** — Soit  $E$  un espace vectoriel et  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  diagonalisables qui commutent (c'est à dire qui satisfont  $u \circ v = v \circ u$ ). On note  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  les valeurs propres de  $u$  et  $E_1 \dots E_k$  les espaces propres associés.

1. Montrer que  $v(E_i) \subset E_i$ .
2. On note  $v_i = v|_{E_i}$  la restriction de  $v$  à  $E_i$ . Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , montrer que  $P(v_i) = P(v)|_{E_i}$ .
3. En déduire que  $v_i$  est diagonalisable. Soit  $B_i$  une base de  $E_i$  formée de vecteurs propres de  $v_i$ .

Montrer que  $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$  est une base de  $E$  formée de vecteurs propres à la fois pour  $u$  et pour  $v$ .

4. En déduire que  $u$  et  $v$  sont diagonalisables dans une même base. Montrer que  $u - v$  est diagonalisable.

**B** — *Application* : On considère maintenant une matrice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ , et on lui associe l'endomorphisme  $w_A \in \text{End}(M_{n,n}(\mathbb{R}))$  suivant :

$$w : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que si  $A$  est diagonalisable,  $w_A$  l'est aussi.

On note

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \quad \text{et} \quad v_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array}$$

1. Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, (u_A)^k = u_{A^k}$ . En déduire que  $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(u_A) = u_{P(A)}$ , puis que tout polynôme annulateur de  $A$  est un polynôme annulateur de  $u_A$ .
2. Montrer que

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow u_A \text{ diagonalisable}$$

On admet sans démonstration que le même résultat est vrai pour  $v_A$  :

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow v_A \text{ diagonalisable}$$

3. Montrer que  $u_A \circ v_A = v_A \circ u_A$ .
4. En déduire que

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow w_A \text{ diagonalisable}$$

**Exercice 1552** Dans un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , on considère un vecteur  $v$  non nul, un scalaire  $\lambda$  et l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \lambda \langle x, v \rangle v \end{array}$$

1. Pour  $x \in E$ , calculer  $\|u(x)\|^2$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  et  $v$  pour que  $u$  soit une transformation orthogonale.
3. Lorsque  $u$  est orthogonale, dire a priori quelles sont les valeurs propres possibles de  $u$ , puis dire si elles sont effectivement valeur propre en étudiant les espaces propres associés.
4. Lorsque  $u$  est orthogonale, donner une interprétation géométrique de  $u$ .

**Exercice 1553** On considère un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est une similitude de  $E$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que

$$u^*u = \lambda \text{id}$$

Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $u$  est une similitude

(ii)  $u$  est colinéaire à une transformation orthogonale, c'est à dire

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists v \in O(E) / u = \alpha v$$

(iii)  $u$  conserve l'orthogonalité, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

Pour (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), on pourra commencer par montrer que (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Pour (i)  $\Rightarrow$  (iii), on commencera par montrer que  $x$  et  $u^*u(x)$  sont toujours colinéaires, c'est à dire que

$$\forall x \in E \exists \lambda_x / u^*u(x) = \lambda_x x$$

puis on montrera que  $\lambda_x$  est indépendant de  $x$ .

**Exercice 1554** Dans un espace euclidien  $E$ , on considère un vecteur unitaire  $a$ , et à un réel  $k \neq -1$  on associe l'endomorphisme  $u_k$  de  $E$  défini par :

$$u_k(x) = k \langle x, a \rangle a + x$$

1. Montrer que  $u_k$  est un isomorphisme. Déterminer  $u_k^{-1}$ . (on pourra commencer par calculer  $\langle u_k(x), a \rangle$ )
2. Rappeler la caractérisation de l'adjoint d'un endomorphisme, et montrer que  $u$  est auto adjoint.
3. Pour quelles valeurs de  $k$   $u$  est-il orthogonal? Interpréter alors géométriquement cette transformation.
4. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de  $u_k$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1555** 1. Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormale donnée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , exprimer  $a_{ij}$  en fonction de  $f$  et des vecteurs  $e_i$  et  $e_j$ .

2. Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que  $S = (u|f(u))$ .
  - (b) En déduire que  $|S| \leq n$ .

**Exercice 1556** Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $A_{ij}$  le cofacteur  $(i, j)$  de  $A$ . Montrer que  $\det A > 0$  si et seulement si  $a_{ij}$  et  $A_{ij}$  sont de même signe.

**Exercice 1557** Que peut-on dire d'une matrice carrée réelle à la fois symétrique et orthogonale? Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1558** Quelles sont les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien qui sont diagonalisables.

**Exercice 1559** Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. (a) Soit  $x \in E$  tel que  $f^*(x) = x$ . Montrer que  $\|f(x) - x\|^2 = \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$ .  
(b) En déduire que  $\ker(f^* - \text{Id}) \subseteq \ker(f - \text{Id})$ .
2. Soit  $h$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $(\text{Im } h)^\perp \subseteq \ker h^*$ .
3. En déduire que les sous-espace vectoriels  $\ker(f - \text{Id})$  et  $\text{Im}(f - \text{Id})$  sont supplémentaires et orthogonaux.

**Exercice 1560** Déterminer une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et une matrice orthogonale  $U \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  telles que  $UDU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1561** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $u^* = u^{-1}$ .
- ii)  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
- iii)  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- iv) L'image par  $u$  d'une base orthonormée de  $E$  est une base orthonormée de  $E$ .
- v) L'image par  $u$  de toute base orthonormée de  $E$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Exercice 1562** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que si  $\varphi(F) \subset F$  alors  $\varphi(F^\perp) \subset F^\perp$ . A-t-on égalité?



**Exercice 1563** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension 3 et  $u \in \mathcal{O}^-(E)$ . On pose  $F = \text{Ker}(u + id)$ .

1. Montrer que  $F \neq \{0\}$ . Montrer que  $F$  et  $F^\perp$  sont stables par  $u$ . Pour quelle raison  $\dim(F) \neq 2$ ?
2. On suppose  $E \neq F$ . Montrer que la restriction de  $u$  à  $F^\perp$  est une rotation.
3. En déduire qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et une base  $\varepsilon$  de  $E$  tels que :

$$\text{Mat}(u, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1564** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension 4 et  $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_4\}$  une base

orthonormée de  $E$ . Soit  $A$  la matrice  $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'en-

domorphisme déterminé par  $\text{Mat}(u, \varepsilon) = A$ .

1. Montrer que  $u \in \mathcal{O}^+(E)$ .
2. Montrer que l'espace vectoriel  $F$  engendré par  $e_1$  et  $u(e_1)$  est stable par  $u$ . Montrer que la restriction de  $u$  à  $F$  est une rotation.
3. Montrer que  $F^\perp$  est stable par  $u$  et est engendré par  $e_4$  et  $u(e_4)$ . La restriction de  $u$  à  $F^\perp$  est-elle une rotation ?

**Exercice 1565** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ . Montrer pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  l'égalité :  $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$ . En déduire que si  $A$  est triangulaire supérieure elle est diagonale.

**Exercice 1566** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{O}(E)$ . On pose  $v = id - u$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(v) = \text{Im}(v)^\perp$ .
2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u^p(x)$  est la projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Ker}(v)$ .

**Exercice 1567** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $s \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $s^2 = id$ .

1. Montrer que  $E = \text{Ker}(s - Id) \oplus \text{Ker}(s + Id)$ .
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - i)  $s \in \mathcal{O}(E)$ .
  - ii)  $\text{Ker}(s - Id) \perp \text{Ker}(s + Id)$ .
  - iii)  $s = s^*$ .
3. On note désormais  $s_F$  l'unique symétrie  $s \in \mathcal{O}(E)$  telle que  $F = \text{Ker}(s + Id)$ . Montrer que pour tout  $u \in \mathcal{O}(E)$  on a :  $us_F u^{-1} = s_{u(F)}$ .
4. Montrer que si  $f$  est une application de  $E$  dans lui-même laissant stables toutes les droites vectorielles (c'est à dire que pour tout  $x \in E$  il existe  $\lambda_x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ ) alors  $f$  est linéaire.
5. En déduire que  $Z(\mathcal{O}(E)) = \{id, -id\}$  et que si  $n \geq 3$  alors  $Z(\mathcal{O}^+(E)) = \{id, -id\} \cap \mathcal{O}^+(E)$ . (on pourra appliquer 3.) dans le cas où  $F$  est une droite ou un plan.)

6. Que se passe-t-il lorsque  $n = 1$  et  $n = 2$ ?

**Exercice 1568** Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in O(E)$  telle que  $\ker(u - id) \neq E$ . Soit  $x \in E$  tel que  $u(x) \neq x$ . On pose  $y = u(x)$ . Alors on sait qu'il existe une unique réflexion  $r$  telle que  $r(y) = x$ .

1. Montrer que  $\ker(u - id) \subset \ker(r - id)$ .
2. Montrer que  $\dim \ker(r \circ u - id) > \dim \ker(u - id)$ .
3. Montrer par récurrence que toute isométrie vectorielle est la composée de réflexions.

**Exercice 1569** Soit  $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\forall (i, j) |a_{i,j}| \leq 1$  et que  $\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leq n$ .

**Exercice 1570** Soit  $E$  euclidien,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in E^{2n}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, (x_i | x_j) = (y_i | y_j).$$

Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal  $f$  de  $E$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = y_i.$$

## 33 Polynômes d'endomorphismes

### 33.1 Idéaux

**Exercice 1571** Montrer qu'un idéal de  $K[X]$  est distinct de  $K[X]$  si et seulement s'il ne contient aucun polynôme constant non nul.

**Exercice 1572** Soient les polynômes  $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $Q = X^2 + X + 1$  de  $\mathbb{R}[X]$ . Déterminer  $\text{pgcd}(P, Q)$  puis la somme et l'intersection des idéaux principaux  $(P)$  et  $(Q)$  de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 1573** Les parties  $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P'(0) = 0\}$  et  $\mathcal{J} = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = P'(0) = 0\}$  sont-elles des idéaux de  $\mathbb{R}[X]$ ? Dans l'affirmative, en donner un générateur.

### 33.2 Polynômes annulateurs

**Exercice 1574** Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer le polynôme minimal de  $A$ .

En déduire  $A^{-1}$ ,  $A^3$  et  $A^5$ .

**Exercice 1575** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(0) = 0$  et  $P'(0) \neq 0$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $P(f) = 0$ .

Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ ; en déduire  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

**Exercice 1576** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{rg}(f - id) = 1$ . On note  $H = \text{Ker}(f - id)$ .

1. Soit  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  une base de  $H$  et  $e_n \notin H$ . Montrer que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  et donner l'allure de la matrice de  $f$  dans cette base.
2. Montrer que le polynôme  $(X - 1)(X - \det(f))$  annule  $f$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit diagonalisable.

**Exercice 1577** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $u$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent, c'est à dire tel que  $\exists m \in \mathbb{N}, u^m = 0$ . Montrer que  $u^n = 0$

**Exercice 1578** Déterminer toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  telles que

$$A^2 - 3A + 2\text{id} = 0$$

Même question pour

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18\text{id} = 0$$

**Exercice 1579** Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Le démontrer dans le cas particulier où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

[Exercice corrigé]

**Exercice 1580** 1. Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Donner un polynôme annulateur de  $A$  de degré 2.

3. En déduire qu'il existe des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  tels que  $A^n = a_n A + b_n$  et les calculer en fonction de  $n$ .

**Exercice 1581** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  de trace non nulle. Montrer que toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  qui commute avec  $A^2$  commute aussi avec  $A$ . (*Indication* : utiliser Cayley-Hamilton.)

**Exercice 1582** Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie annulé par les polynômes  $P = 1 - X^3$  et  $Q = X^2 - 2X + 1$  ?

**Exercice 1583** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que le polynôme minimal de  $f$  est  $P = (X - 2)(X - 1)^2$ . Quel est le polynôme minimal de  $f + \text{Id}_E$  ?

**Exercice 1584** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice diagonale. Si  $P \in K[X]$ , calculer  $P(M)$  et en déduire le polynôme minimal de  $M$ .

**Exercice 1585** En appliquant la méthode utilisée en cours pour démontrer l'existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, déterminer le polynôme minimal de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 2 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1586** Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme d'une droite vectorielle ?

**Exercice 1587** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1. Montrer que le polynôme minimal de  $f$  est de la forme  $X(X - \lambda)$ .

**Exercice 1588** Déterminer les endomorphismes d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  dont le polynôme minimal est de degré 1.

**Exercice 1589** 1. Montrer que  $P = (X - 1)^2(X - 2)$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et en déduire le polynôme minimal de la matrice  $A$ .

2. Soit  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Calculer explicitement  $B^2 - \text{tr}(B)B + \det(B)I_2$ . En déduire le polynôme minimal de la matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1590** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P$  son polynôme minimal. Montrer que  $f$  est bijective si et seulement si  $P(0) \neq 0$ .

**Exercice 1591** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension 3. Montrer que  $f$  admet un plan stable (on discutera en fonction du caractère trigonalisable de  $f$ ).

**Exercice 1592** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que  $\ker(f^3 - f - \text{Id}) \oplus \ker f = E$ .
2. (a) Montrer que  $\text{Im } f \subseteq \ker(f^3 - f - \text{Id})$ .
- (b) En déduire que  $\text{Im } f = \ker(f^3 - f - \text{Id})$ .

**Exercice 1593** Déterminer le polynôme minimal de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1594** Soient  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et la matrice par blocs à coefficients réels suivante

$$M = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & O \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $M^2$  et  $M^3$  et en déduire que  $M$  est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de  $M$ .

**Exercice 1595** On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculer son polynôme caractéristique, calculer  $A^2$  et déduire de ces calculs et du théorème de Cayley-Hamilton l'inverse de  $A$ .

**Exercice 1596** On se place dans  $E = \mathbb{C}^4$  muni de sa base canonique  $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . On désigne par  $j$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $b$  est la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer l'image de  $b$  par  $j, j^2, j^3$ , et  $j^4$ .
2. En déduire  $J^2, J^3$  et  $J^4$ .
3. Déterminer un polynôme annulateur non nul de  $J$ .
4. Montrer que si  $P \in \mathbb{C}[X]$  avec  $\deg(P) \leq 3$  vérifie  $P(J) = 0$  alors  $P = 0$ .
5. En déduire le polynôme minimal de  $J$ .
6. Montrer que  $J$  est diagonalisable.
7. Déterminer les valeurs propres de  $J$ .

## 34 Réduction d'endomorphismes : diagonalisation

### 34.1 Valeurs propres, vecteurs propres

**Exercice 1597** Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $A_m \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice  $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ .

1. Calculer les valeurs propres de  $A_m$  et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de  $m$  le rang de  $A_m$ . Déterminer lorsque cela est possible  $A_m^{-1}$ .
3. Lorsque  $A_m$  n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de  $A_m$ .

**Exercice 1598** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $-1$  n'est pas valeur propre de  $A$ , alors il existe une matrice  $Q$  antisymétrique (i.e.  ${}^tQ = -Q$ ) telle que  $A = (I+Q)^{-1}(I-Q) = (I-Q)(I+Q)^{-1}$  et qu'on a  $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ . Réciproque ?

**Exercice 1599** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $g \circ f$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $f \circ g$  (on distinguera les cas  $\lambda = 0$  et  $\lambda \neq 0$ ).

**Exercice 1600** 1. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ayant chacun  $n$  valeurs propres distinctes dans  $K$ . Montrer que

$$f \circ g = g \circ f \iff f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

2. Supposons maintenant que  $K = \mathbb{C}$  et que  $f \circ g = g \circ f$ . Si  $u$  est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel  $F$  est  $u$ -stable si  $u(F) \subset F$ . Montrer que tout sous-espace propre de  $f$  est  $g$ -stable.

*Remarque :* On peut montrer par récurrence sur  $n$  qu'il existe un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ . On admettra ce résultat.

3. Considérons  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que  $f \circ g = g \circ f$  et déterminer les sous-espaces propres de  $M$  et  $N$ .
- Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle les matrices de  $f$  et  $g$  sont diagonales.

**Exercice 1601** Soient  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Soit  $f$  l'endomorphisme associé à la matrice  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Uniquement* en examinant la matrice  $A$ , trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de  $A$ , puis deux sous-espaces  $f$ -stables.
2. Que représente la matrice  $B$  ?

**Exercice 1602** Soit  $u \in \text{End}(E)$ . On note  $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ . Montrer que

$$a_0 = \det(u) \quad \text{et} \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr}(u)$$

**Exercice 1603** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ . Montrer que  $u \circ v$  et  $v \circ u$  ont les mêmes valeurs propres.

**Exercice 1604** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent, c'est à dire tels que  $u \circ v = v \circ u$ . On suppose que  $v$  admet  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de  $E$ , formée de vecteurs propres communs à  $u$  et à  $v$ .

En déduire qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $u = a_0 \text{id} + a_1 v + \dots + a_{n-1} v^{n-1}$

**Exercice 1605** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible,

- montrer que  $\{0\} \subset \text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \text{Ker } A^3 = \mathbb{R}^4$  et déterminer les dimensions respectives de  $\text{Ker } A$  et  $\text{Ker } A^2$ ,
- déterminer un vecteur  $e_1$  tel que  $\mathbb{R}^4 = \text{Ker } A^2 \oplus \text{Vect}(e_1)$ ,
- montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1)$  est une famille libre,
- montrer que  $Ae_1 \in \text{Ker } A^2$ , et que  $\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A \oplus \text{Vect}(Ae_1)$ ,
- montrer que  $A^2e_1 \in \text{Ker } A$  et déterminer un vecteur  $e_2$  tel que  $\text{Ker } A = \text{Vect}(A^2e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$ ,
- montrer que  $(e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2)$ . Calculer  $P^{-1}AP$ .

Adapter ce travail à l'étude de  $B$  et  $C$

**Exercice 1606** Soit  $J$  la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Trouver une relation entre  $J$  et  $J^2$ .
- En déduire les valeurs propres de  $J$  et calculer leurs multiplicités.
- Donner le polynôme caractéristique de  $J$ .

**Exercice 1607** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$AB - BA = A$$

Le but de cet exercice est de montrer que  $A$  est nilpotente, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0.$$

On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on considère l'application :

$$\psi \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ M \mapsto MB - BM \end{array}$$

- Montrer que  $\psi$  est linéaire de  $E$  dans  $E$ .
- Montrer par récurrence que :  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$ .

3. On suppose que  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$ . Montrer que  $\psi$  a une infinité de valeurs propres.

4. Conclure.

**Exercice 1608** Soit  $M$  la matrice suivante :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer le polynôme caractéristique de  $M$ . En déduire  $M^{-1}$ .

**Exercice 1609** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E = \mathbb{C}^n$ . Soit  $\pi_1, \dots, \pi_N$  des endomorphismes tous non nuls de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$   $N$  nombres complexes distincts. On suppose que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = \sum_{k=1}^N \lambda_k^m \pi_k.$$

1. Montrer que  $\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(f) = \sum_{k=1}^N P(\lambda_k) \pi_k$

On considère le polynôme  $Q = \prod_{1 \leq k \leq N} (X - \lambda_k)$  et pour chaque  $p \in \{1, \dots, N\}$  les polynômes suivants :

$$Q_p = \prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq p}} (X - \lambda_k) \quad \text{et} \quad \tilde{Q}_p = \frac{1}{Q_p(\lambda_p)} Q_p$$

2. Calculer  $Q(f)$ . Qu'en déduit-on pour  $f$  ?

3. Montrer que  $Sp(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$

4. Montrer que  $\tilde{Q}_p(f) = \pi_p$ . Vérifier alors que  $\pi_p \circ \pi_q = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi_p & \text{si } p = q \end{cases}$

5. Calculer  $f \circ \pi_p$ . En déduire que  $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

On note  $E_p$  l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_p$ .

6. Montrer que  $\text{Im } \pi_p \subset E_p$ . Réciproquement, pour  $x \in E_p$ , montrer que  $x \in \text{Ker } \pi_q$  pour  $q \neq p$  (on calculera par exemple  $\pi_q \circ f(x)$  de deux façons différentes) puis que  $x = \pi_p(x)$ . En déduire que  $E_p \subset \text{Im } \pi_p$ .

7. En déduire que  $\text{Im } \pi_p = E_p$  et que  $\text{Ker } \pi_p = \bigoplus_{q \neq p} E_q$ . Décrire géométriquement  $\pi_p$ .

**Exercice 1610** On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P' - 2(nX + a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.

Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés.

**Exercice 1611** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ .

1. Montrer que l'ensemble  $\text{Com} = \{v \in \mathcal{L}(E, E) / uv = vu\}$  des endomorphismes de  $E$  qui commutent avec  $u$  est un espace vectoriel.

2. (a) Soit  $v$  un élément de  $\text{Com}$ . Montrer que  $v$  préserve les espaces propres de  $u$  (c'est à dire que si  $E_\lambda$  est un espace propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a  $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$ ).

(b) Donner la dimension des espaces propres de  $u$  et montrer que si  $x$  est un vecteur propre de  $u$  alors c'est aussi un vecteur propre de  $v$ .





1. Montrer que la condition  $f^2 = 0$  est équivalente à  $Im f \subset Ker f$ . Quelle condition vérifie alors le rang de  $f$ ? On suppose dans la suite que  $f^2 = 0$ .
2. Soit  $F$  un supplémentaire de  $Ker f$  dans  $E$  et soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $F$ . Montrer que la famille des vecteurs  $(e_1, \dots, e_r, f(e_1), \dots, f(e_r))$  est libre. Montrer comment la compléter si nécessaire par des vecteurs de  $Ker f$  pour obtenir une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base?
3. Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on  $Im f = Ker f$ ?
4. Exemple. Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  de matrice dans la base canonique  $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $f^2 = 0$ . Déterminer une nouvelle base dans laquelle la matrice de  $f$  a la forme indiquée dans la question 2).

**Exercice 1615** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Trouver les valeurs propres de  $A$  et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Exercice 1616** Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$ .

**Exercice 1617** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de  $A$ . Cette matrice est-elle diagonalisable?

**Exercice 1618** On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, les réduire.

**Exercice 1619** Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  telle que  $A^n = 0$  et  $A^{n-1} \neq 0$ . Soit  $x_0$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $A^{n-1}x_0 \neq 0$ . Montrer que  $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{n-1}x_0)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Comment s'écrit la matrice  $A$  dans cette base?

Application : on pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3$  et donner une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle  $A$  a une forme simple.

**Exercice 1620** On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable? Justifier. Écrire alors  $M$  sous une forme plus simple.

**Exercice 1621** Soit  $T$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par sa matrice  $A$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de  $\text{Ker } T$  et  $\text{Im } T$ .
2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de  $T$ , puis ses valeurs propres.  
(b) Justifier, sans calcul, que  $T$  soit diagonalisable et écrire une matrice diagonale semblable à  $A$ .  
(c) Calculer une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $T$ .
3. Soient  $f_1 = -2e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$  et  $f_3 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .  
(a) Justifier que  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et écrire la matrice  $P$  de passage de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à la base  $(f_1, f_2, f_3)$ .  
(b) Calculer  $P^{-1}$ .  
(c) Écrire la matrice  $D$  de  $T$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$ .
4. Quelle relation relie  $A^3$ ,  $D^3$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ ? En déduire  $A^3$ .

**Exercice 1622** Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1623** Pour quelles valeurs de  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle

diagonalisable? On ne cherchera pas à réduire explicitement  $A$ .

**Exercice 1624** Soit  $u$  l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ u : P &\mapsto (2X + 1)P - (X^2 - 1)P' \end{aligned}$$

Montrer que  $u$  est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de  $u$ , et, si c'est possible, diagonaliser  $u$ .

**Exercice 1625** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est aussi une valeur propre de  $A$ . De même, montrer que si  $x$  est un vecteur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{x}$  (où  $\bar{x}$  désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées des composantes de  $x$ ) est aussi un vecteur propre complexe de  $A$ .

Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1626** Soit  $A_t$  la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ . Sans calculer le polynôme caractéristique de  $A_t$ , montrer que  $(t - 1)$  est valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. Que dire de la multiplicité de la valeur propre  $(t - 1)$ ? En déduire le spectre de  $A_t$ .  $A_t$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 1627** Pour quelles valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

**Exercice 1628** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes diagonalisables de  $E$ , qui commutent (c'est à dire tels que  $u \circ v = v \circ u$ ). On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  (resp.  $\mu_1, \dots, \mu_q$ ) les valeurs propres de  $u$  (resp. de  $v$ ), et  $F_1, \dots, F_p$  les espaces propres associés (resp.  $G_1, \dots, G_q$ ).

1. Montrer que chaque  $G_j$  (resp.  $F_i$ ) est stable par  $u$  (resp.  $v$ ) (c'est à dire que  $u(G_j) \subset G_j$ ).
2. On pose  $H_{ij} = F_i \cap G_j$ . Soit  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Montrer que  $F_i$  est la somme directe des espaces  $(H_{ij})_{1 \leq j \leq q}$ .
3. En déduire l'énoncé suivant : *Lorsque deux endomorphismes diagonalisables  $u$  et  $v$  commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à  $u$  et à  $v$  (en d'autres termes,  $u$  et  $v$  sont diagonalisables simultanément dans la même base).*

**Exercice 1629** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1630** Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  et  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(f)$  est diagonalisable.

**Exercice 1631** Soit  $P_0$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et  $f$  l'application suivante :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto R = \text{reste de la division euclidienne de } P \text{ par } P_0 \end{array}$$

À l'aide d'un polynôme annulateur de  $f$ , montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 1632** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels, et  $A$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1 - \beta & \alpha & \alpha - 1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1 - \alpha & 1 + \beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

À quelle condition sur  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $A$  est-elle diagonalisable ?

On suppose  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ . Vérifier que  $A(A - I) = 0$ . En déduire  $A^n$  et  $(A + I)^{-1}$ .

**Exercice 1633** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables, sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$  ?

Lorsqu'elles sont diagonalisables, donner une matrice diagonale semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réduire explicitement  $A$  et  $C$ .

**Exercice 1634** On considère un endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ , tel que  $f^2$  est diagonalisable. Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

1. On suppose que  $f$  est diagonalisable. On note  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  les valeurs propres (distinctes) de  $A$ , et  $E_1, \dots, E_r$  les espaces propres associés.

(a) Montrer que si  $\text{Ker } f = \{0\}$  alors  $\text{Ker } f^2 = \{0\}$ .

(b) On suppose maintenant que  $\text{Ker } f \neq \{0\}$ . On note  $\alpha_{\alpha_1}, \dots, \alpha_{\alpha_r}$  les autres valeurs propres de  $f$ , et  $E_0, \dots, E_r$  ses espaces propres. En utilisant que  $E = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ , montrer que si  $f^2(x) = 0$  alors  $f(x) = 0$ . En déduire que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

2. On suppose que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .

(a) Montrer que si  $\mu$  est une valeur propre de  $f$ , alors  $\mu^2$  est une valeur propre de  $f^2$ .

i. Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $f^2$ , et  $\mu$  et  $-\mu$  ses deux racines complexes. Montrer que

$$\text{Ker}(f - \mu \text{id}) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}) \quad \text{et que} \quad \text{Ker}(f + \mu \text{id}) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}).$$

ii. Montrer que

$$\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id})$$

(remarquer que  $\forall y \in \text{Ker } f^2 \quad y = \frac{1}{2\mu}((f + \mu \text{id})(y) - (f - \mu \text{id})(y))$ ).

(b) Montrer (avec soin) que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 1635** La matrice suivante est-elle diagonalisable, triangularisable ? Effectuer explicitement la réduction.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1636** Soit  $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $A = \left( \begin{array}{c|c} 0 & J \\ \hline J & 0 \end{array} \right)$ . Calculer  $A^2$ , puis  $A^3$ . A l'aide d'un polynôme annulateur de  $A$ , montrer que  $A$  est diagonalisable.

Sans chercher à calculer le polynôme caractéristique de  $A$ , donner un ensemble fini contenant toutes les valeurs propres de  $A$ , puis donner les valeurs propres elles mêmes ainsi que leurs multiplicités. En déduire le polynôme caractéristique de  $A$ . [Exercice corrigé]

**Exercice 1637** On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$  et l'application  $\phi_A$  définie par :

$$\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array}$$

1. Montrer que  $\phi_A$  est linéaire.

Le but de l'exercice est de montrer que  $\phi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

2. Calculer  $\phi_A^2(B)$ , puis  $\phi_A^k(B)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . En déduire que si  $P$  est un polynôme, alors  $P(\phi_A) = \phi_{P(A)}$ .

3. En déduire que  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  si et seulement si  $P$  est un polynôme annulateur de  $\phi_A$ .

4. Montrer que  $\phi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  l'est.

**Exercice 1638** A  $n$  nombres complexes  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  avec  $a_2 \neq 0$ , on associe la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de  $A_n$ . Qu'en déduit-on pour le polynôme caractéristique  $\chi_n$  de  $A_n$ ?
2. Calculer  $\chi_2, \chi_3$ .
3. On pose  $b_n = a_2^2 + \cdots + a_n^2$ . Par récurrence, montrer que  $\chi_n = (-X)^{n-2}(X^2 - a_1X - b_n)$ .
4. Si  $b_n = 0$ ,  $A_n$  est-elle diagonalisable?
5. Si  $b_n \neq 0$ , à quelle condition  $A_n$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 1639** Soit  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  ${}^tA$ . La matrice  $A$  est-elle

diagonalisable?

Trouver une matrice  $P$  orthogonale telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**Exercice 1640** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^p = 0$  pour un certain entier  $p$ . Quelles sont les valeurs propres de  $u$ . A quelle condition  $u$  est-il diagonalisable? Montrer que  $u^n = 0$ .

**Exercice 1641** Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables, triangularisables?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A l'aide du polynôme caractéristique de  $B$ , calculer  $B^{-1}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1642** Soit  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  ${}^tA$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
2. Diagonaliser  $A$ .
3. Diagonaliser  $A$  dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ ).

[Exercice corrigé]

**Exercice 1643** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_3[X]$ , on considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ u : P &\mapsto P(0)X^3 + P'(0)X^2 + \frac{1}{2}P''(0)X + \frac{1}{6}P'''(0) \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique. Calculer  $A^2$ .
2.  $u$  est-elle diagonalisable? Si oui, donner une base de  $\mathbb{R}^3[X]$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

**Exercice 1644** On considère un réel  $\alpha$  et l'application  $T_\alpha$  suivante :

$$T_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto X(X-1)P'' + (1+\alpha X)P' \end{array}$$

1. Montrer que pour tout entier  $n > 0$ , la restriction de  $T_\alpha$  à  $\mathbb{R}_n[X]$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. On suppose pour cette question que  $n = 3$ .
  - (a) Ecrire la matrice de  $T_\alpha$  dans la base  $(1, X, X^2, x^3)$ .
  - (b) Déterminer les valeurs propres de  $T_\alpha$ . On les note  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .
  - (c) Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $T_\alpha$  a des valeurs propres multiples.
  - (d) Donner un vecteur propre de  $T_\alpha$  pour chaque valeur propre, lorsque  $\alpha = -1$ , puis  $\alpha = -4$ . L'endomorphisme  $T_{-4}$  est-il diagonalisable ?
3. On suppose maintenant  $n > 3$ .
  - (a) Ecrire la matrice de  $T_\alpha$  dans la base  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .
  - (b) Déterminer les valeurs propres de  $T_\alpha$ . On les note  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
  - (c) Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles  $T_\alpha$  a des valeurs propres multiples. Dans chaque cas, donner la liste des valeurs propres avec leurs multiplicités.
  - (d) Déterminer la dimension de  $\text{Ker } T_\alpha$  et de  $\text{Im } T_\alpha$  lorsque  $\alpha \notin \{1-n, \dots, -1, 0\}$ .
  - (e) Déterminer  $\text{Ker } T_\alpha$  pour  $\alpha = -1$ , puis  $\alpha = 0$ . L'endomorphisme  $T_0$  est-il diagonalisable ?
  - (f) Lorsque  $\alpha = p-1$  avec  $p \in \{1, \dots, n\}$ , donner un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que  $T_\alpha(P) = 0$ . En déduire  $\text{Ker } T_\alpha$ . Préciser sa dimension.
  - (g) Soit  $\lambda_k$  une valeur propre simple de  $T_\alpha$ . Donner un vecteur propre de  $T_\alpha$  associé à  $\lambda_k$ .

**Exercice 1645** Soient  $\mathbb{R}^n$  euclidien,  $f \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f$  est une symétrie orthogonale.

**Exercice 1646** Diagonaliser en base orthonormale les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}; B = \begin{pmatrix} a & b & & \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Peut-on déterminer  $a, b$  tels que  $B$  soit la matrice d'un produit scalaire ?

**Exercice 1647** Montrer que si  $A$  est une matrice symétrique réelle, alors  $A + iI$  est inversible.

**Exercice 1648** Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^3$  dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{C}.$$

- (a) Déterminer, suivant les valeurs de  $k$ , la dimension du noyau de  $f$ .
- (b) Montrer que  $M$  admet une valeur propre réelle entière indépendante de  $k$ , et calculer toutes les valeurs propres de  $M$ .
- (c) Indiquer toutes les valeurs de  $k$  pour lesquelles on obtient des valeurs propres multiples. Pour quelles valeurs de ces  $k$  la matrice  $M$  est-elle semblable à une matrice diagonale ?

**Exercice 1649** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = -I$ .

1. Montrer que  $n$  est pair,  $n = 2p$ .
2. Calculer  $Sp_{\mathbb{R}}(A)$  et montrer  $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$ . Pour quelle raison  $A$  est elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ?
3. Montrer que si  $\{y_1, \dots, y_k\}$  est une base de  $E_i$ , alors  $\{\overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}\}$  est une base de  $E_{-i}$ . Quelle est donc la valeur de  $k$  ?
4. Démontrer que  $A$  est semblable (dans  $M_n(\mathbb{R})$ ) à une matrice diagonale par blocs dont chacun des blocs diagonaux est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . (on pourra utiliser la question 3.)

**Exercice 1650** Soient  $M$  et  $N \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$  l'application  $N \mapsto MN - NM$ .

1. Soient  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $A$  et montrer que  $B$  n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si  $N$  est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle  $\lambda$  de  $\varphi_M$  alors  $N$  est nilpotente. (on pourra établir que pour tout  $k \in \mathbb{N} : MN^k - N^kM = k\lambda N^k$ .)
3. Montrer que l'identité n'appartient pas à l'image de  $\varphi_M$ . (utiliser la trace.)
4. Soit  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $\varphi_D$  puis  $\varphi_A$ . Montrer que  $\varphi_B$  n'est pas diagonalisable.
5. Montrer que si  $M$  est diagonalisable,  $\varphi_M$  est diagonalisable.
6. Etablir la réciproque lorsque  $M$  a au moins une valeur propre.

**Exercice 1651** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une application  $p \in \mathcal{L}(E)$  est nommée projecteur lorsque  $p^2 = p$ .

1. Montrer que si  $p$  est un projecteur  $1-p$  est un projecteur. Montrer que  $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$ .
2. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs tels que  $p+q$  soit aussi un projecteur. Montrer que :
  - (a)  $pq = qp = 0$ .
  - (b)  $\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ .
  - (c)  $\text{Ker}(p+q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ .

On suppose désormais  $E$  de dimension finie et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

3. Montrer que tout projecteur est diagonalisable et que deux projecteurs sont semblables si et seulement si ils ont même trace.
4. Montrer que toute matrice diagonalisable est combinaison linéaire de projecteurs.

**Exercice 1652** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $P(Sp(u)) = \{P(\lambda); \lambda \in Sp(u)\}$ .

1. On suppose que  $u$  est diagonalisable. Montrer que  $P(Sp(u)) = Sp(P(u))$ .
2. Montrer, dans le cas général,  $P(Sp(u)) \subset Sp(P(u))$ .
3. Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  montrer que  $Sp(P(u)) \subset P(Sp(u))$ . Ce résultat est-il vrai lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ?

**Exercice 1653** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2$  soit diagonalisable. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

**Exercice 1654** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  déterminée par sa matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  dans une base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $M$  est diagonalisable.
2. Montrer que la restriction de  $f$  à tout sous-espace stable est diagonalisable.
3. En déduire tous les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$ .

**Exercice 1655** Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\varphi_M \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$  l'application  $N \mapsto MN$ . Montrer que  $\varphi_M$  est diagonalisable si et seulement si  $M$  est diagonalisable. (utiliser le polynôme minimal.)

**Exercice 1656** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) La famille  $\{id, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$  est libre.
- (ii) Il existe  $x \in E : \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  engendre  $E$ .
- (iii) Les valeurs propres de  $f$  sont simples.

**Exercice 1657** Soit  $\rho$  l'application de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans lui-même qui à un polynôme  $P$  associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 1)$ .

1. Montrer que  $\rho$  est linéaire.
2. Montrer que  $\rho^2 = \rho$ . En déduire que  $\rho$  est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour  $\rho$ .

**Exercice 1658** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice dans la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de  $A$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Calculer  $(A - I)^2$ . En déduire  $A^n$ , en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soient  $P(X) = (X - 1)^2$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $Q$  par  $P$  en fonction de  $Q(1)$  et  $Q'(1)$ , où  $Q'$  est le polynôme dérivé de  $Q$ .  
En remarquant que  $P(A) = 0$  (on dit alors que  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ ) et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme  $Q$ , retrouver  $A^n$ .
4. Montrer que l'image de  $\mathbb{R}^3$  par l'endomorphisme  $(A - I)$  est un sous-espace de dimension 1, dont on désignera une base par  $\varepsilon_2$ . Déterminer ensuite un vecteur  $\varepsilon_3$  tel que  $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . Soit enfin  $\varepsilon_1$ , un vecteur propre de  $f$ , non colinéaire à  $\varepsilon_2$ . Ecrire  $\tilde{A}$ , la matrice de  $f$  dans la base  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ , ainsi que la matrice de passage  $P$  et son inverse  $P^{-1}$ . Retrouver  $A^n$ .

**Exercice 1659** Soit  $f$  un automorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $f^2$  est diagonalisable.

**Exercice 1660** Les questions sont indépendantes.  $K$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base fixée de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Quels sont les valeurs propres de l'endomorphisme nul de  $E$  ?
2. On suppose que la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ .  
(a) 2 est-il valeur propre de  $f$  ?



- (b) Le vecteur  $2e_1 + e_2 + e_3$  est-il un vecteur propre de  $f$  ?
- Pourquoi un vecteur de  $E$  ne peut-il être vecteur propre relativement à deux valeurs propres distinctes ?
  - (a) Est-il vrai que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  et si  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  alors  $\lambda$  est racine de  $P$  ?  
(b) Est-il vrai que si  $\lambda$  est une racine d'un polynôme annulateur de  $f$  alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  ?
  - Montrer que si  $f^2 - 2f + \text{Id}_E = 0$  alors 1 est valeur propre de  $f$ .
  - Montrer qu'il existe toujours au moins un scalaire  $\alpha$  tel que  $f - \alpha \text{Id}_E$  est bijectif.
  - Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  de  $E$  avec  $n = 2$  tel que la somme de deux vecteurs propres de  $f$  n'est pas un vecteur propre de  $f$ .
  - On suppose que  $E = E_1 \oplus E_2$  et que si  $x \in E$  s'écrit  $x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  alors  $f(x) = 2x_1 - 3x_2$ .  
(a) Quel résultat assure l'existence d'un tel endomorphisme ?  
(b) Montrer que  $f$  est diagonalisable.
  - La matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?
  - Si l'endomorphisme  $f$  admet 0 pour valeur propre et est diagonalisable, que peut-on dire de la dimension du noyau de  $f$  ?

**Exercice 1661** Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes et le cas échéant, les diagonaliser :

- $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ ,
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}), k \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 1662** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $\text{tr}(A) \neq 0$  et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(K)$ .
- Montrer que  $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$  et  $\text{vect}(A)$  sont des sous-espaces propres de  $f$ .
- En déduire que  $f$  est diagonalisable et écrire la matrice réduite de  $f$ .

**Exercice 1663** Montrer que si le polynôme minimal d'un endomorphisme  $f$  d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie admet une racine  $\lambda \in K$  alors  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ .

**Exercice 1664** Étudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,
- $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$ ,

**Exercice 1665** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1.

1. Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors  $\text{tr}(f) \neq 0$ .
2. Montrer qu'il existe  $\lambda \in K$  tel que le polynôme caractéristique de  $f$  s'écrive

$$\chi_f = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$

3. (a) Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(f) \neq 0$ .
- (b) Réduire sans calcul la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

**Exercice 1666** Soient les matrices  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $Y^2 = D$ .
  - (a) Montrer que  $Y$  et  $D$  commutent.
  - (b) En déduire que  $Y$  est diagonale puis déterminer  $Y$ .
2. (a) Montrer que  $A$  est diagonalisable.
  - (b) En déduire les solutions  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de l'équation  $X^2 = A$ .

**Exercice 1667** Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors  $f^2$  est diagonalisable et  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ .
2. Soit  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Montrer que  $\ker(f^2 - \mu^2 \text{Id}_E) = \ker(f - \mu \text{Id}_E) \oplus \ker(f + \mu \text{Id}_E)$ .
3. On suppose  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ .
  - (a) Montrer que  $\ker(f) = \ker(f^2)$ .
  - (b) On suppose en outre que  $f^2$  est diagonalisable. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 1668** On considère la matrice par blocs  $A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ .

1. Calculer  $A^2$ .
2. Rechercher les éléments propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 1669** On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et par  $E_n$ , le sous-espace des polynômes de degré au plus  $n$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta P(x) = (x+1)P'(x) + 2P(x)$  définit une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Quel est le degré de  $\Delta P$  lorsque  $P$  appartient à  $E_n$  ?
2. On considère  $\Delta_2$ , la restriction de  $\Delta$  au sous-espace  $E_2$ . Déterminer les valeurs propres de  $\Delta_2$ . L'endomorphisme  $\Delta_2$  est-il diagonalisable ? Est-ce que  $\Delta_2$  est un isomorphisme ?
3. En utilisant la définition des valeurs propres, calculer les valeurs propres et les polynômes propres de  $\Delta$ .

**Exercice 1670** Pour tout élément non nul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique  $\{e_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$  est la matrice  $A = (\alpha_{i,j})$  où  $\alpha_{i,j} = a_i a_j$ .

1. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
2. En déduire les sous-espaces propres de  $u$ . Déterminer les valeurs propres de  $u$ . L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de  $u$  ?

**Exercice 1671** Soit  $B$  une matrice diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit son rayon spectral par

$$\rho(B) = \max \{ |\lambda| \text{ avec } \lambda \text{ est une valeur propre de } B \}.$$

1. Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ .

2. En déduire que  $I - B$  est inversible et que  $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k$ .

**Exercice 1672 (Endomorphisme diagonalisable de  $\mathbb{R}^2$ )** On considère l'endomorphisme  $a$  de  $E = \mathbb{R}^2$  dont la matrice représentative  $A = [a]_e^e$  dans la base canonique  $e$  est  $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ .

Calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de  $a$ . Quel théorème du cours garantit l'existence d'une base  $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  de vecteurs propres? Choisir ensuite  $f$  telle que  $[\text{id}_E]_f^e$  et  $[\text{id}_E]_e^f$  soient à coefficients entiers. Dessiner  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$ , en prenant des unités d'axes assez petites. Dessiner quelques vecteurs  $\vec{x}$  et leurs images  $a(\vec{x})$  à l'aide de  $f$ .

Trouver deux matrices  $P$  et  $D$  carrées d'ordre 2 telles que  $D$  soit diagonale,  $P$  inversible et  $A = PDP^{-1}$ . Calculer  $[a^{50}]_f^f$ ,  $[a^{50}]_e^e$  et  $A^{50}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{2n}} a^{2n}$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1673 (Endomorphisme d'un espace de matrices)** Soit  $K$  un corps commutatif quelconque, et soit  $F = \mathcal{M}_n(K)$  l'espace vectoriel sur  $K$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ . Si  $i$  et  $j$  sont des entiers compris entre 1 et  $n$ , on note par  $F_{ij}$  l'élément de  $F$  dont le coefficient  $(i, j)$  est 1 et dont les autres coefficients sont nuls. Montrer que les  $F_{ij}$  forment une base de  $F$ . Dimension de  $F$ ? Soit  $D$  dans  $F$  et diagonale. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $K$  et soit l'endomorphisme  $\Phi$  de  $F$  qui à la matrice  $X$  fait correspondre la matrice  $\Phi(X) = \alpha XD + \beta DX$ . Calculer  $\Phi(F_{ij})$ .  $\Phi$  est-il un endomorphisme diagonalisable? Donner son polynôme caractéristique en fonction des coefficients de  $D$  et de  $\alpha$  et  $\beta$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1674** Soit  $\theta \in ]0, \pi[$ . On considère les deux matrices d'ordre  $n$  :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \cos \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos \theta \end{bmatrix}$$

Montrer par récurrence que  $\det B = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  (Méthode : développer par rapport à la dernière ligne). Montrer que  $\det B$  s'annule pour  $n$  valeurs distinctes de  $\theta$  de  $]0, \pi[$ , et les déterminer. Si  $P_A$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , calculer  $P_A(-2 \cos \theta)$  et déduire de ce qui précède les valeurs propres de  $A$ . Montrer que les valeurs propres des matrices  $2I_n + A$  et  $2I_n - A$  sont strictement positives.

[Exercice corrigé]

## 35 Réduction d'endomorphismes : autres réductions

### 35.1 Sous-espaces stables

**Exercice 1675** Soit l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Le plan  $P$  d'équation  $y + z = 0$  est-il stable par  $f$ ? La droite vect  $\{(1, 1, 1)\}$  est-

elle stable par  $f$  ?

**Exercice 1676** Soit  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$  telle que  $f^3 + f^2 + f = 0$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $F = \text{Im } f$ .

1. (a) Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $f$ .  
 (b) Montrer que  $\ker f \cap \text{Im } f = \{0\}$ .  
 (c) En déduire que la restriction  $g$  de  $f$  à  $F$  est un automorphisme de  $F$ .
2. (a) Montrer que si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$  alors  $\lambda = 0$ .  
 (b) En déduire que le rang de  $f$  est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de  $g$ ).

**Exercice 1677** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $a \in E$ .

1. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $a$  et stable par  $f$  est  $F_a = \text{vect} \{f^k(a) : k \in \mathbb{N}\}$ .
2. Montrer que si  $\dim(E) = n$  alors  $F_a = \text{vect} \{f^k(a) : k = 0, \dots, n-1\}$ .
3. Soit l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il n'existe pas  $a \in \mathbb{R}^3$  tel que  $F_a = \mathbb{R}^3$ . Généraliser à un endomorphisme diagonalisable.

**Exercice 1678** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$  et  $g$  l'endomorphisme de  $G$  induit par  $f$ .

1. Montrer que si  $P \in K[X]$  vérifie  $P(f) = 0$  alors  $P(g) = 0$ .
2. En déduire que si  $f$  est diagonalisable alors  $g$  est diagonalisable.
3. Application : trouver tous les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1679** 1. Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est trigonalisable.  $A$  est-elle diagonalisable ? Réduire  $A$  et déterminer son polynôme minimal.

2. Même question pour  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1680** Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie ?

**Exercice 1681** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres complexes. Exprimer  $\text{tr}(A^p)$  où  $p \in \mathbb{N}$  en fonction des  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Exercice 1682** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $fg = gf$ .

1. Soit  $x \in E$ . Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = g(x)$  alors  $f^n(x) = g^n(x)$ .  
*Dans toute la suite, on suppose  $g$  nilpotent.*
2. (a) Déduire de 1. que si  $f$  est inversible alors  $f + g$  est inversible.  
 (b) Déduire de (a) que si  $f + g$  est inversible alors  $f$  est inversible.
3. (a) Soit  $h \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. Montrer que  $\det(h + \text{Id}_E) = 1$ .  
 (b) Montrer que  $\det(f + g) = \det(f)$  (on distinguera selon que  $f$  est inversible ou non et on utilisera les questions précédentes).

**Exercice 1683** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel,  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$  et  $P$  un polynôme de  $K[X]$ .

1. Montrer que  $P(g)$  et  $f$  commutent.
2. Montrer que le noyau et l'image de l'endomorphisme  $P(g)$  sont stables par  $f$ . Donner des cas particuliers de cette situation.

**Exercice 1684** Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ . On désigne par  $g$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$  sur  $F$ .

1. Montrer que  $\text{Sp}(g) \subseteq \text{Sp}(f)$ .
2. Montrer que si  $P(f) = 0$  alors  $P(g) = 0$ . En déduire que le polynôme minimal de  $g$  divise celui de  $f$ .

**Exercice 1685** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que si  $f$  admet un sous-espace vectoriel propre de dimension  $p \geq 2$  alors il admet une infinité de sous-espaces vectoriels stables par  $f$ .

## 35.2 Trigonalisation

**Exercice 1686** Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ,
2.  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1687** Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1688** Soient les matrices à coefficients réels suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trigonaliser les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
2. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 1689** Soit  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\text{Id})$ .
2. Trouver une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\text{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $g^2 = f$ . Montrer que  $\ker f^2$  est stable par  $g$ . En déduire qu'un tel endomorphisme  $g$  ne peut exister.

**Exercice 1690** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice  $A$  dans la base canonique  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Trouver une base  $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{Mat}(f, \varepsilon') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  un endomorphisme tel que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{Ker}(f - 2Id)$  et  $\text{Ker}(f - Id)^2$  sont laissés stables par  $g$ . En déduire que la matrice de  $g$  dans  $\varepsilon'$  est de la forme  $\text{Mat}(g, \varepsilon') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$  avec  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Préciser les valeurs possibles de  $a, b, c$  et  $d$ .
4. Soit  $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ . Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).

**Exercice 1691** Les questions sont indépendantes.  $K$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base fixée de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Donner un exemple de matrice de  $M_2(K)$  non trigonalisable.
2. Donner un exemple de matrice de  $M_n(K)$  à la fois non diagonalisable et trigonalisable.
3. Déterminer sans calculs les valeurs propres complexes de  $f$  si sa matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
4. On suppose que  $n = 3$  et que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ . Montrer que le plan d'équation  $x + 2z = 0$  est stable par  $f$ .
5. Que peut-on dire d'un vecteur générateur d'une droite stable par  $f$ ?
6. Montrer que si l'endomorphisme  $f$  est trigonalisable alors il admet au moins un sous-espace vectoriel stable par  $f$  et de dimension  $k \in [0, n]$  fixée.

### 35.3 Réduction de Jordan

**Exercice 1692** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  dans la base canonique de  $E$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $u$ . Déterminer les sous-espaces propres  $E_1$  et  $E_2$ . Pourquoi  $u$  est-il non diagonalisable? Est-il triangularisable?
2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques  $F_1$  et  $F_2$ . Pour  $k = 1, 2$ , donner l'ordre  $\beta_k$  du nilpotent  $(u - \lambda_k \cdot \text{id}_E)|_{F_k}$  ( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ).
3. Si  $v \in F_2$  et  $v \notin \ker(u - 2 \cdot \text{id}_E)^{\beta_2 - 1}$ , montrer que  $f_1 = (u - 2 \cdot \text{id}_E)^{\beta_2 - 1}(v)$ ,  $f_2 = (u - 2 \cdot \text{id}_E)^{\beta_2 - 2}(v), \dots, f_{\beta_2} = v$  forment une base de  $F_2$ .
4. On note  $f = \{f_1, \dots, f_4\}$  la complétée de la base précédente par une base de  $F_1$ . Vérifier que  $T = [u]_f^f$  est triangulaire. Décomposer  $T$  sous la forme  $D + N$ , où  $D$  est diagonale,  $N$  est nilpotente, et  $DN = ND$ . Calculer  $T^5$ .

**Exercice 1693** Quel est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie ?

**Exercice 1694** Donner toutes les réduites de Jordan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  des endomorphismes nilpotents pour  $1 \leq n \leq 4$ .

**Exercice 1695** Soit  $\rho$  l'application de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans lui-même qui à un polynôme  $P$  associe le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X^2 - 1)$ .

1. Montrer que  $\rho$  est linéaire.
2. Montrer que  $\rho^2 = \text{id}$ . En déduire que  $\rho$  est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour  $\rho$ .

**Exercice 1696** Les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$  ont-elles une racine carrée ?

**Exercice 1697** Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1698** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $N$  (le plus petit entier  $p$  tel que  $f^p = 0$ ). Montrer que

$$N = n \Leftrightarrow \text{rang } f = n - 1.$$

### 35.4 Autres réductions

**Exercice 1699** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique  $P_u$  de  $u$ . Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques  $F_i$ .
2. Donner une base suivant laquelle la matrice de  $u$  se décompose en deux blocs diagonaux.
3. Donner les projections  $p_i$  de  $\mathbb{R}^4$  sur  $F_i$ .

**Exercice 1700** Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = -A$  et  $A \neq 0$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 1701** Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice par blocs  $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ .

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $M$ .

2. (a) Déterminer le noyau de  $f$ .
- (b) Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**Exercice 1702** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ . On note  $x_k = u^k(x_0)$  et  $F$  le sous espace vectoriel engendré par la famille  $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ , c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de  $x_k, k \in \mathbb{N}$  :

$$F = \left\{ x \in E / \exists N \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0 \dots \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}, x = \sum_{i=0}^N \alpha_i x_i \right\}$$

1. Montrer que  $F$  est stable par  $u$ , c'est à dire que  $\forall x \in F, u(x) \in F$ .
2. Montrer qu'il existe un entier  $k \leq n$  tel que  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$  soit libre et  $(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})$  soit liée. Montrer alors qu'il existe des scalaires  $(a_0, a_1, \dots, a_k)$  tels que

$$x_{k+1} = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k$$

3. En déduire que le polynôme  $P_0 = X^{k+1} - \sum_{i=0}^k a_i X^i$  satisfait  $(P_0(u))(x_0) = 0$ .
4. Montrer que pour tout  $x$  de  $F$ , il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $x = (P(u))(x_0)$ .
5. A l'aide des questions (3) et (4), montrer que  $\forall x \in F, \exists R \in \mathbb{R}_k[X], x = (R(u))(x_0)$ .  
(on pourra effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $P_0$ )
6. En déduire que  $(x_0 \dots x_k)$  est une base de  $F$ .
7. Ecrire la matrice de la restriction  $u|_F$  de  $u$  à  $F$  dans cette base. Quel est le polynôme caractéristique de  $\tilde{u}$  ?
8. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans la quelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$

où les matrices  $C_i$  sont des matrices Compagnon.

[Exercice corrigé]

### 35.5 Applications

**Exercice 1703** Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner un polynôme annulateur de  $A$  de degré aussi petit que possible. En déduire  $A^{-1}$ ,  $A^3$ , et  $A^5$ .

**Exercice 1704** Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 5y \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = -3x - y - 2z \end{cases}$$



**Exercice 1705** Déterminer toutes les suites  $(u_n)$  telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0 \end{cases}$$

Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \end{cases}$$

**Exercice 1706** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} = x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} = -x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$$

Donner toutes les solutions qui satisfont  $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = -1$ .

**Exercice 1707** Réduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(c'est à dire étudier la diagonalisabilité ou la triangularisabilité de  $A$ , et donner une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit aussi simple que possible)

*Application :* Déterminer toutes les fonctions dérivables  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant les conditions :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y \\ z' = x - 3y + 4z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

(on rappelle qu'il n'est pas utile de calculer  $P^{-1}$ ...)

**Exercice 1708** Déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeur complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} + 2u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

Montrer que les suites réelles satisfaisant cette relation sont les suites de la forme :

$$u_n = A(-1)^n + B \cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \phi\right)$$

où  $A, B$  et  $\phi$  sont des réels.

**Exercice 1709** Etant donnés quatre nombres réels  $(u_0, v_0, w_0, x_0)$ , on définit quatre nouveaux nombres  $(u_1, v_1, w_1, x_1)$  en calculant les moyennes suivantes :  $u_1 = \frac{2u_0 + v_0 + w_0 + x_0}{5}$ ,  $v_1 = \frac{u_0 + 2v_0 + w_0 + x_0}{5}$ ,  $w_1 = \frac{u_0 + v_0 + 2w_0 + x_0}{5}$ , et  $x_1 = \frac{u_0 + v_0 + w_0 + 2x_0}{5}$ . En itérant ce procédé, on définit quatre suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$ , et  $(x_n)$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice  $A$  associée à cette relation de récurrence, et la matrice  $B = 5A$ . Que dire de la diagonalisabilité de  $B$  ?
2. Sans calculer le polynôme caractéristique de  $B$ , montrer que 1 est valeur propre de  $B$ . Quelle est la dimension de l'espace propre associé ? Que dire de la multiplicité de 1 comme valeur propre de  $B$  ?
3. En utilisant la trace de  $B$ , déterminer toutes les valeurs propres de  $B$ .
4. Donner un polynôme annulateur de  $B$  de degré 2.
5. En déduire l'existence de deux réels  $a_n$  et  $b_n$ , que l'on calculera, tels que  $B^n = a_n B + b_n I$ .
6. Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{5^n}$ . En déduire que la suite de matrices  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et donner sa limite.

(On rappelle qu'une suite de matrices  $M_n$  est dite convergente si chaque suite de coefficient est convergente. On pourra utiliser sans démonstration la continuité des opérations élémentaires sur les matrices pour cette notion de limite, c'est à dire que :

- si  $(\lambda_n)$  est une suite convergente alors pour toute matrice  $M$ , la suite  $(\lambda_n M)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n M) = (\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n) M$

- si  $(M_n)$  est une suite de matrices convergente alors pour tout vecteur  $X$ , la suite de vecteurs  $(M_n X)$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n X) = (\lim_{n \rightarrow \infty} M_n) X$ .

7. En déduire que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes, et donner leur limite.

**Exercice 1710** Donner toutes les suites  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(z_n)$  telles que : (on notera  $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$ )

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n + x_n \end{cases}$$

Parmi les solutions de ce système, donner celle qui satisfait  $x_0 = 2$  et  $y_0 = z_0 = 1$ .

[Exercice corrigé]

**Exercice 1711** Soit  $a$  un réel. On considère le système à  $n$  équations et  $n$  inconnues suivant :

$$\begin{cases} a x_1 - x_2 = 0 \\ -x_{p-1} + a x_p - x_{p+1} = 0 \quad (2 \leq p \leq n-1) \\ -x_{n-1} + a x_n = 0 \end{cases}$$

Écrire la matrice  $A_n$  associée à ce système. On note  $D_n = \det A_n$ . Calculer  $D_n$  en fonction de  $D_{n-1}$  et  $D_{n-2}$

**Exercice 1712** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ , avec  $(b, c, d) \neq (0, 0, 0)$ .

1. Calculer  $A^t A$ . Que vaut  $\det A$  au signe près ?
2. En étudiant le signe du terme en  $a^4$  dans le déterminant de  $A$ , montrer que  $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ . Sans calcul supplémentaire, en déduire que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = ((a - X)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .
3.  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ? (justifier)

4. On se place maintenant dans le cas où  $a = 1$ ,  $b = c = d = -1$ . Vérifier que  $(i\sqrt{3}, 1, 1, 1)$  et  $(-1, i\sqrt{3}, -1, 1)$  sont des vecteurs propres de  $A$ , puis diagonaliser  $A$  sur  $\mathbb{C}$ .
5. Application : résoudre le système récurrent suivant (il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de passage de la question précédente). On notera  $\omega = 1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{i\pi/3}$ .

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n + h_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n - w_n + h_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n - h_n \\ h_{n+1} = -u_n - v_n + w_n + h_n \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ h_0 = 0 \end{cases}$$

[Exercice corrigé]

**Exercice 1713** Résoudre le système différentiel  $X' = AX$  où  $A$  est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

**Exercice 1714** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Par différentes méthodes, calculer  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la formule obtenue a un sens pour  $n \in \mathbb{Z}$  et donner plusieurs méthodes pour établir sa validité dans ce cas.

**Exercice 1715** Soit l'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer toutes les droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$ .
- Déterminer tous les plans vectoriels  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$  (on commencera par étudier le polynôme caractéristique de la restriction de  $f$  à  $P$ ).
- Donner la liste de tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$ .

**Exercice 1716** Calculer les puissances et l'exponentielle ( $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ ) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 1717** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $g^2 = f$ . Dans le cas d'existence de  $g$ , donner le nombre exact de  $g$  tel que  $g^2 = f$ .

*Application* Soit :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = M$ . Déterminer une  $N$ .

**Exercice 1718** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $M$  et  ${}^tM$  sont semblables.

*Indication* : le montrer d'abord pour des blocs de Jordan n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale.

**Exercice 1719** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $M$  pour que  $M$  et  $2M$  soient semblables.

**Exercice 1720** Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes. On pose

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) : au = ua\}.$$

1. Soit  $u \in \mathcal{C}$ .
  - (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de  $a$  est stable par  $u$ .
  - (b) En déduire que  $u$  est diagonalisable.
2. (a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  et que  $\dim \mathcal{C} = n$ .
  - (b) Montrer que la famille  $(\text{Id}_E, a, \dots, a^{n-1})$  est une famille libre de  $\mathcal{L}(E)$  (raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme minimal de  $a$ .)
  - (c) En déduire que  $\mathcal{C} = \{P(u) : P \in K[X]\}$ .

**Exercice 1721** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $a \in E$  tels que la famille  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  est une base de  $E$ .

1. Soit  $P \in K[X] \setminus \{0\}$  un polynôme annulateur de  $f$ . Montrer que  $\deg(P) \geq n$  (raisonner par l'absurde).
2. En déduire que le polynôme minimal de  $f$  est (au signe près) le polynôme caractéristique de  $f$ .

**Exercice 1722** Donner un exemple de deux matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et pourtant non semblables. Qu'en est-il pour deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

**Exercice 1723** Soit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$$\mathcal{S} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \geq 3, u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\}.$$

1. Montrer que l'application

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3, u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2)$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriels.

2. Soient la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et, pour  $n \geq 2$ ,  $U_n = (u_{n-2}, u_{n-1}, u_n) \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\sigma(U_{n-1}) = U_n$  et en déduire une base de  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 1724** Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  en fonction de  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$ .

**Exercice 1725** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 = f$ . Pour quelles valeurs de  $t \in \mathbb{R}$  l'endomorphisme  $f_t = \text{id} + tf$  est inversible ? Calculer  $f_t^{-1}$ .

**Exercice 1726** Etudier les solutions (suivant  $A$ ) dans  $M_2(\mathbb{C})$  de l'équation  $X^2 = A$ .

**Exercice 1727** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $C(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) ; AB = BA\}$ .

1. On suppose que  $A$  a des valeurs propres simples. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - i)  $B \in C(A)$ .
  - ii)  $B$  a une base de vecteurs propres en commun avec  $A$ .
  - iii) Il existe  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $B = P(A)$ .
  - iv) Il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $B = P(A)$ .
2. On suppose que  $n = 3$  (pour simplifier) et que  $A$  est diagonalisable avec une valeur propre double. Déterminer  $C(A)$ .

**Exercice 1728** Les parties I, II, III et IV peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Soient  $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  une matrice dépendant d'un paramètre réel  $a$

et  $f_a$  l'endomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  ayant pour matrice  $M_a$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On nomme *racine carrée* d'une matrice  $M \in M_n(\mathbb{R})$  toute matrice  $N \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = M$ .

On désigne par  $I$  la matrice identité et, pour toute base  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $\text{Mat}(f_a, \varepsilon)$  la matrice représentant l'endomorphisme  $f_a$  dans la base  $\varepsilon$ .

### I

1. Calculer les valeurs propres de  $M_a$  en fonction de  $a$ . Pour quelle raison la matrice  $M_a$  est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  la matrice  $M_a$  est-elle diagonalisable ?

### II

*On pose maintenant (questions 3 et 4)  $a = 2$ .*

3. Diagonaliser  $M_2$ . Déterminer une racine carrée  $A$  de  $M_2$ .
4. (a) Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $g^2 = f_2$ . Montrer que  $g$  est diagonalisable (on pourra déterminer le polynôme minimal de  $f_2$ ). Montrer que les sous-espaces propres de  $f_2$  sont laissés stables par  $g$ .  
 (b) Démontrer que la matrice  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  a une infinité de racines carrées. En déduire l'existence d'une infinité de racines carrées de  $M_2$ .

### III

5. On pose  $a = 1$ . Montrer que  $M_1 = 2I + N$  avec  $N$  nilpotente (telle que  $N^2 = 0$ ). En déduire la valeur de  $(M_1)^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha I + \beta N$  soit une racine carrée de  $M_1$ .

### IV

*On pose désormais (questions 6 et 7)  $a = 0$ .*

6. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f_0^2) \oplus \text{Ker}(f_0 - 2I)$ . Déterminer une base  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que l'on ait :  $\text{Mat}(f_0, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
7. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  un endomorphisme tel que  $g^2 = f_0$ . Montrer que  $\text{Ker}(f_0^2)$  est laissé stable par  $g$ . En déduire que  $f_0$  n'a pas de racine carrée.

## Sixième partie

## ANALYSE 3

## 36 Fonctions convexes

**Exercice 1729** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in ]0, +\infty[$ .

1. En utilisant la concavité du log, montrer que  $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .
2. Montrer que  $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ .
3. En déduire que  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ .

**Exercice 1730** Soit  $f$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  convexe croissante et non constante. Montrer que  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ .

**Exercice 1731** Soient  $p$  et  $q \in ]0, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

1. Montrer que  $\forall x, y > 0 \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ .
2. Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$  tels que  $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n y_i^q = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$ .
3. Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ . Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. Soit  $p > 1$ . En écrivant  $(x_i + y_i)^p = x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}$ , montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5. Soit  $(a_n)$  une suite strictement positive,  $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ . Montrer que si  $(u_n)$  converge alors  $(v_n)$  aussi.

**Exercice 1732** Soit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  convexe.

1. Montrer que  $f'$  admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  en  $+\infty$ .
2. En déduire que  $\frac{f(x)}{x}$  admet une limite en  $+\infty$  (on pourra utiliser des  $\varepsilon$  et une formule de Taylor à l'ordre 1).

**Exercice 1733**  $I \subset \mathbb{R}^{+*}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $J = \left\{x; \frac{1}{x} \in I\right\}$ .

Montrer que  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}^{+*}$ , puis que si  $(x, y) \in I^2$ , alors :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \exists \mu \in [0, 1], \frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} = \mu \frac{1}{x} + (1-\mu) \frac{1}{y}.$$

Soit  $f$  continue sur  $I$ , et  $g$  définie sur  $J$  par  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $h$  définie sur  $I$  par  $h(x) = xf(x)$ . Montrer que  $g$  est convexe  $\Leftrightarrow h$  est convexe.

**Exercice 1734** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe majorée. Que dire de  $f$ ? Et si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ?

**Exercice 1735** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ ,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ . Montrer que si  $(u_n)_n$  converge alors  $(v_n)_n$  aussi.

**Exercice 1736** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, 1 + \left( \prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( 1 + \prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Exercice 1737** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que  $f$  est convexe.

**Exercice 1738** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe ou  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , dérivable en  $x_0 \in I$  et telle que  $f'(x_0) = 0$ . Montrer que  $x_0$  minimise  $f$  sur  $I$ .

**Exercice 1739** Soit  $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , montrer que  $g$  est convexe si et seulement si :

$$\forall h \in CM([0, 1], \mathbb{R}), g\left(\int_0^1 h\right) \leq \int_0^1 g(h).$$

### 37 Notions de topologie

**Exercice 1740** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

1. Démontrer que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
2. Démontrer que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

et

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Discuter le cas  $n = 1$ .

3. Représenter dans  $\mathbb{R}^2$  la boule unité fermée

$$B_{\|\cdot\|} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| \leq 1\}$$

pour chacune des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Exercice 1741** Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}; & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}; \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\}; & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}; \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}; & F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

**Exercice 1742** Montrer que toute réunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Que peut-on dire des intersections infinies d'ensembles ouverts ?

**Exercice 1743 (partiel 1999)** On définit un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  en posant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de  $A$ . L'ensemble  $A$  est-il connexe ?

**Exercice 1744 (partiel 1999)** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\forall M > 0, \exists R > 0$  tel que  $\|x\| > R \Rightarrow |f(x)| > M$ .
- (2) Pour toute partie bornée  $B$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(B)$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .
- (3) Pour toute partie compacte  $K$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1745** 1. Dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  euclidien muni d'une b.o.n., représenter les ensembles suivants :

- $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 4\}$
- $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 - y^2 > 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{4} < 4\}$
- $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x + y + z < 3 \text{ et } x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } z > 0\}$
- $\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y + z < 1 \\ \text{et } x - y + z < 1 \\ \text{et } -x - y + z < 1 \end{array} \right\}$
- $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 0 \text{ et } 2 < z < 4\}$
- $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < z^2 \text{ et } z > 0\}$
- $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ et } z = x - 1\}$ .

2. Déterminer les projections de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{G}$  sur le plan  $(xOy)$ .

**Exercice 1746 (Images directes et réciproques)** 1. Soit  $f$  l'application affine par morceaux, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ 1+x & \text{si } -2 < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soient  $A = [-1, 0[$  et  $B = [0, 2[$ . Déterminer  $f(A)$ ,  $f^{-1}(B)$ ,  $f(\mathbb{R} \setminus A)$ ,  $f^{-1}(f(A))$ ,  $f(f^{-1}(B))$ ,  $f(A \cap B)$ , et  $f(A) \cap f(B)$ .

2. Soient deux ensembles  $E$  et  $F$ , et  $f : E \rightarrow F$  une application. Comparer les ensembles  $f(A \cap B)$  et  $f(A) \cap f(B)$ ,  $f^{-1}(f(A))$  et  $A$ ,  $f(f^{-1}(B))$  et  $B$ ,  $f(E \setminus A)$  et  $F \setminus f(A)$ .

**Exercice 1747** Soit l'application  $\left( G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & \left( \frac{u}{u+v}, \frac{\sqrt{v(v+2u)}}{u+v} \right) \end{array} \right)$ . On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble de définition de  $G$ . Déterminer  $G(\mathcal{D})$ .

**Exercice 1748** Soient les applications  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définies par :

$$f(x, y) = \left( \frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) \text{ et } g(x, y) = \left( 2x, \frac{y}{\sqrt{2}} \right).$$

Soient les ensembles

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{xy}{2} = 1\},$$

$$\text{et } \mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1\}.$$

Déterminer  $f(\mathcal{D}_1)$  et  $g^{-1}(\mathcal{D}_2)$ .



**Exercice 1749** Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ et } J = \bigcap_{i>0, j>0} \left] - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j} \right[.$$

**Exercice 1750** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ . Montrer les implications suivantes :

- $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in A, x < M \Rightarrow \sup A \leq M$
- $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ .

**Exercice 1751** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ . On définit :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = a + B\}.$$

1. Montrer que  $A + B$  admet une borne supérieure, puis que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .
2. Montrer l'implication :

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in A, \forall y \in B, x + y < M \Rightarrow \sup A + \sup B \leq M.$$

**Exercice 1752** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x \geq \varepsilon$ . Montrer que  $\varepsilon = 0$ .

**Exercice 1753** Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\sup\{|x - y| : (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

**Exercice 1754** Les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\} \\ C &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \cos(x) \geq 0\} \end{aligned}$$

**Exercice 1755** On se propose de montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion d'intervalles ouverts disjoints. On considère donc un ouvert  $U \subset \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in U$  on pose

$$C(x) = \{y \in [x, +\infty[ \mid [x, y] \subset U\} \cup \{y \in ]-\infty, x[ \mid [y, x] \subset U\}.$$

1. Montrer que  $C(x)$  est un intervalle ouvert pour tout  $x$ . (Considérer  $\inf_{y \in C(x)} y$  et  $\sup_{y \in C(x)} y$ .)
2. Pour tous  $x, y$  dans  $U$ , montrer qu'on a  $C(x) = C(y)$  ou  $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ .
3. Conclure.

**Exercice 1756** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . Montrer :

$$1. C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}, C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$$

$$2. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\text{En déduire } \overbrace{A \cap B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

$$3. \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\text{En déduire } \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}.$$

Donner un exemple pour lequel l'inclusion réciproque n'est pas réalisée.

**Exercice 1757** Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On rappelle que la frontière de  $A$  est l'ensemble  $\text{Fr}(A) = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ . Montrer que :

1.  $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap C_A \neq \emptyset\}$
2.  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_A)$
3.  $A$  est fermé si et seulement si  $\text{Fr}(A)$  est inclus dans  $A$ .
4.  $A$  est ouvert si et seulement si  $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$ .

**Exercice 1758** Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ .

1. Montrer que  $\bar{A}$  est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de  $A$ .
2. On suppose maintenant que  $E = \mathbb{R}$ . Dédurre de la question précédente que si  $A$  est bornée, alors  $\sup A \in \bar{A}$ . (Construire une suite de points appropriée.)

**Exercice 1759** Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

**Exercice 1760** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose  $A + B = \{z \in E \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}$ .

Montrer que si  $A$  est ouvert,  $A + B$  est ouvert. (Commencer par le cas où  $B$  est un singleton.)

**Exercice 1761** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $E$  est fermé.

**Exercice 1762** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $A$  une partie non vide et bornée de  $E$ . On définit  $\text{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$ .

1. Montrer que si  $A$  est bornée, alors  $\bar{A}$  et  $\text{Fr}(A)$  sont bornés.
2. Comparer  $\text{diam}(A)$ ,  $\text{diam}(\overset{\circ}{A})$  et  $\text{diam}(\bar{A})$  lorsque  $\overset{\circ}{A}$  est non vide.
3. (a) Montrer que  $\text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam}(A)$ .  
 (b) Soit  $x$  et  $u$  des éléments de  $A$  avec  $u \neq 0$ . On considère l'ensemble  $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$ . Montrer que  $\sup X$  existe.  
 (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point  $x$  de  $A$  coupe  $\text{Fr}(A)$ .  
 (d) En déduire que  $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$ .

**Exercice 1763** Dans  $\mathbb{R}^2$  euclidien, les ensembles suivants sont-ils compacts ?

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \|(x, y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$ .
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|(x, y)\| \leq 2 \text{ et } xy = 1\}$ .
- $C = \{(x, \cos n) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 18 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exercice 1764** Soit  $E = \mathbb{R}^d$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On définit la *distance* d'un élément  $x_0$  de  $E$  à une partie  $A$  de  $E$ , notée  $d(x_0, A)$ , par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons  $A$  compact. Montrer que pour tout  $x_0 \in E$  il existe  $y \in A$  tel que  $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$ .
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que  $A$  est fermé. (On remarquera que pour toute partie  $B$  de  $A$  on a  $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$ .)
3. Montrer que l'application qui à  $x_0$  associe  $d(x_0, A)$  est continue sur  $E$  (sans aucune hypothèse sur  $A$ ).
4. En déduire que si  $A$  est un fermé de  $E$  et  $B$  un compact de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \quad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints.

**Exercice 1765** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum.

**Exercice 1766** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$  on note

$$A + B = \{z \in E \mid \exists(x, y) \in A \times B, z = x + y\}.$$

Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  fermé, alors  $A + B$  est fermé.

**Exercice 1767** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $(x_n)$  une suite convergente de  $E$  et  $x$  sa limite. Montrer que l'ensemble  $\{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est compact.

**Exercice 1768** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On suppose que  $(x_n)$  est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

**Exercice 1769** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ ; montrer qu'elle est fermée si et seulement si pour toute partie fermée bornée  $K$ ,  $K \cap X$  est fermée bornée.

**Exercice 1770** Soient  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ ,

$$\omega_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{k^2}{n^2} \right\},$$

et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n.$$

$\Omega$  est-il ouvert ? fermé ? ...

**Exercice 1771** Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'ensembles fermés bornés de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} \subset K_n$ , et  $K_n \neq \emptyset$ .

Montrer que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

**Exercice 1772** Montrer que l'intersection de deux ensembles ouverts est ouverte, que l'union de deux ensembles fermés est fermée, que cela reste vrai pour un nombre fini d'ensembles, mais que cela peut devenir faux si l'on considère des suites infinies.

**Exercice 1773** Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble; on pose

$$\text{Int}(E) = {}^c \overline{{}^c E}.$$

Montrer que  $\text{Int}(E)$  est le plus grand ouvert contenu dans  $E$ .

**Exercice 1774** Soit  $A$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $\overline{A}$  est aussi bornée et que

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in \overline{A}} \|x\|.$$

**Exercice 1775** Soit  $C$  une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ , montrer que  $\overline{C}$  est aussi convexe.

**Exercice 1776** Classer (pour l'inclusion) les parties :  $\overline{A \cap B}$ ,  $\overline{A} \cap \overline{B}$  et  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{A} \cup \overline{B}$ .

**Exercice 1777** Dans l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}$ , chacune des parties suivantes est-elle ouverte ? fermée ?

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0, 1[, [0, +\infty[, ]0, 1[ \cup \{2\}, \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}, \bigcap_{n \geq 1} ] - 1/n, 1/n[.$

**Exercice 1778** Soit  $E$  un evn (espace vectoriel normé). Soit  $A$  une partie de  $E$ . Montrer l'égalité

$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E} \setminus A \quad \text{et} \quad E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$$

**Exercice 1779** Soit  $E$  un evn,  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Montrer que  $\overline{V}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. Montrer que si  $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$  alors  $V = E$ .

**Exercice 1780** Représenter graphiquement les parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  et dire pour chacune d'elle si c'est un ouvert, un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer leurs adhérences et intérieurs.

1.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$

2.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| = 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$$

3.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\}$$

4.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 - xy > 0\}$$

5.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x + 4y = 2\}$$

6.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

7.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$$

8.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{1/n\} \times [0, 1]$$

**Exercice 1781** Déterminer l'adhérence de chacune des parties de  $\mathbb{R}$  suivantes :

1.  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

2.  $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$

3.  $\{(-1)^n / (1+1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$

**Exercice 1782** Soient  $A$  et  $B$ , deux parties d'un evn  $E$ .

1. Montrer que si  $O$  est un ouvert de  $E$ , alors  $A+O$  est ouvert. (Indication : Prendre d'abord  $A = \{a\}$  puis  $A$  quelconque ....)

2. Etablir que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  et que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . (Trouver un exemple où l'inclusion est stricte)

**Exercice 1783** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle.  $\forall n \geq 1$ , on pose  $A_n = \{u_p / p \geq n\}$ . Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est  $V = \bigcap_{n \geq 1} \overline{A_n}$ , et qu'ainsi  $V$  est fermé. En déduire que si la suite est bornée, alors l'ensemble  $V$  est un compact non vide.

## 38 Fonctions de deux variables

## 38.1 Limites

**Exercice 1784** Etudier l'existence des limites suivantes :

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x+y}$  ;
2.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$  .
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^2-y^2}$
5.  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$

**Exercice 1785** Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$$

et que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  n'existe pas.

**Exercice 1786** Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

**Exercice 1787** Déterminer les limites

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$  ;
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$  ;
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$  ;
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$  ;
5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^4}$  ;
6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$  ;
7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2}$  ;
8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{\cos y - \cosh x}$

**Exercice 1788** Etudier l'existence d'une limite en  $(0,0,0)$  pour les fonctions  $f$  suivantes :

1.  $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$  ;
2.  $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$  .

## 38.2 Continuité

**Exercice 1789** Étudier la continuité des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$f_1(0, 0) = 0.$$

$$f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$f_2(0, 0) = 0.$$

**Exercice 1790 (partiel 1999)** 1. Étudier la continuité de la fonction  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)(\sin y)}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Soit  $a > 0$  fixé. Étudier la continuité de la fonction  $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^a |y|^a}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Étudier la continuité de la fonction  $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_3(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y > x^2 \\ 0 & \text{si } y \leq x^2. \end{cases}$$

4. On définit une fonction continue de l'ouvert  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$  dans  $\mathbb{R}$  en posant

$$f_4(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \cos \frac{1}{z}.$$

Étudier la possibilité de prolonger  $f_4$  en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1791** Prolonger par continuité la fonction  $g : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2) \end{cases}$ .

**Exercice 1792** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, \cdot)$  et  $f(\cdot, y)$  sont continues. Montrer qu'il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications continues sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x, y) = f(x, y).$$

**Exercice 1793** Trouver les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x + y, x - y).$$

**Exercice 1794** Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction suivante :

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.

$$f(x, y) = \begin{cases} x e^{\arctan \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1795** On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}\}$  par

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Peut-on prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 1796** Etudier la continuité en  $(0, 0)$  des fonctions suivantes :

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^3 |y|^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1797** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+2y)^3 y^3}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{x}{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{\frac{x-y}{1+x}} & \text{si } x \neq y \\ \frac{1}{1+x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

définie sur  $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ .

### 38.3 Différentiabilité

**Exercice 1798** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \text{ si } |x| > |y| \\ (x, y) \mapsto y \text{ si } |x| < |y| \\ (x, y) \mapsto 0 \text{ si } |x| = |y| \end{cases}$ .

Étudier la continuité de  $f$ , l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

**Exercice 1799** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$ .

Étudier la continuité de  $f$  et l'existence des dérivées partielles.  $f$  est-elle  $C^1$  ?

**Exercice 1800** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$ .

Étudier la continuité de  $f$ . Montrer que  $f$  est  $C^1$ . Calculer les dérivées partielles secondes en  $(0, 0)$ . Que remarque-t-on ?

**Exercice 1801** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x, y) = f(x + y) \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2) \quad k(x, y) = f(xy)$$

**Exercice 1802** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}$ .

Montrer que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  suivant tout vecteur mais n'admet pas de développement limité à l'ordre 1 en  $(0, 0)$ .

**Exercice 1803** Étudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et le caractère  $C^1$  des applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$(x, y) \rightarrow x \text{ si } |x| > |y|, (x, y) \rightarrow y \text{ si } |y| > |x|, (x, y) \rightarrow 0 \text{ si } |x| = |y|;$$

$$(x, y) \rightarrow (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, (0, 0) \rightarrow 0;$$

$$(x, y) \rightarrow \sin |xy|;$$

$$(x, y) \rightarrow \frac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0, y \text{ si } x = 0.$$



**Exercice 1804** Soit  $a \in \mathbb{R}^2$  fixé ; l'application  $x \rightarrow \langle x, a \rangle$  de  $\mathbb{R}^2$  usuel dans  $\mathbb{R}$  est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont-elles continues ?

**Exercice 1805** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

– si  $|x| \leq y$ ,  $f(x, y) = x^2$ .

–  $f(x, y) = y^2$  sinon.

Étudier la continuité de  $f$  et l'existence de dérivées partielles.

**Exercice 1806** Montrer qu'une norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^2$  ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0.

**Exercice 1807** Soient  $\alpha > 0$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad |f(x, y)| \leq (x^2 + y^4)^{\frac{2\alpha-3}{4}}.$$

(b) Calculer  $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} |f(y^2, y)|$ .

(c) Étudier la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

2. (a) Montrer que

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x|^{\alpha-2}.$$

(b) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{|f(x, x)|}{\sqrt{2}|x|}$ .

(c) Étudier la différentiabilité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

**Exercice 1808** 1. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y) = e^{x^2+y^2}$  au point  $P(1, 0)$  suivant la bissectrice du premier quadrant.

2. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y, z) = x^2 - 3yz + 5$  au point  $P(1, 2, 1)$  dans une direction formant des angles égaux avec les trois axes de coordonnées.

3. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y, z) = xy + yz + zx$  au point  $M(2, 1, 3)$  dans la direction joignant ce point au point  $N(5, 5, 15)$ .

**Exercice 1809** Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières, des fonctions suivantes :

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{x \ln(x^2+y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1810** On définit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  existent en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et que  $f$  est continue mais pas différentiable en  $(0, 0)$ .

**Exercice 1811** Soit  $f : ]0, 1[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } x > y \end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de  $f$ .

**Exercice 1812** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en  $(0, 0)$  et admet des dérivées partielles dans toutes les directions, mais n'y est pas différentiable.

**Exercice 1813** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^2$  mais que  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$  ne sont pas continues en certains points de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 1814** Etudier la différentiabilité et la continuité des dérivées partielles de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Exercice 1815** Etudier la différentiabilité en  $(0, 0)$  des fonctions définies par

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 1816** Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1.  $f(x, y) = x^2 e^{xy}$ ;
2.  $g(x, y, z) = x^2 y^3 \sqrt{z}$ ;
3.  $h(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ .

**Exercice 1817** Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction  $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$  en  $(2, 1)$ .

**Exercice 1818** On définit la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$  et  $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$  existent en tout point de  $\mathbb{R}^2$  bien que  $f$  ne soit pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 1819** 1. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$  au point  $P(1, 2)$  dans une direction formant avec l'axe  $Ox$  un angle de  $\frac{\pi}{3}$ .

2. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$  au point  $P(1, 2)$  dans la direction joignant ce point au point  $M(4, 6)$ .

3. Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  au point  $P(1, 1)$  suivant la bissectrice du premier quadrant.

**Exercice 1820** Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

1.  $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$  ;

2.  $f(x, y) = \ln \left( 1 + \frac{x}{y} \right)$ .

**Exercice 1821** Calculer  $df(1, 1)$ , si  $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ .

**Exercice 1822** Calculer la dérivée de la fonction  $F(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$  à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées  $x, y, z$  les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ .

### 38.4 Extremums

**Exercice 1823** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 - xy^2$ . Montrer que  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $f$ , qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de  $f$  à toute droite passant par  $(0, 0)$  admet en ce point un minimum local.

**Exercice 1824** Ecrire la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point  $(x_0, y_0)$  donné.

1.  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;

2.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;

3.  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos xy$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;

4.  $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;

5.  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .

**Exercice 1825** Pour chacune des fonctions suivantes étudiez la nature du point critique donné :

1.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  au point critique  $(0, 0)$  ;

2.  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$  au point critique  $(0, 0)$  ;

3.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$  au point critique  $(0, 0, 0)$  ;

4.  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$  au point critique  $(0, 0)$ .

**Exercice 1826** Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1.  $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$  ;

2.  $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$  ;

$$3. f(x, y, z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2;$$

$$4. f(x, y, z) = (x + y + z)^2.$$

**Exercice 1827** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$ .

1. Étudier les extremums locaux de  $f$ .

2. Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Montrer que  $f$  a un maximum  $M$  et un minimum  $m$  sur  $D$ .

3. Soit  $(x, y) \in D$ . Montrer que si  $f(x, y) = M$  ou  $f(x, y) = m$ , alors  $x^2 + y^2 = 1$ .

4. Étudier la fonction  $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ . En déduire les valeurs de  $M$  et  $m$ .

**Exercice 1828** Trouver le point du plan ( $2x - y + z = 16$ ) le plus proche de l'origine.

**Exercice 1829** Déterminer les extremums de  $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$  sur  $[0, 1]^2$ .

**Exercice 1830** Soit  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ . Montrer que  $f$  admet au plus un extremum. Ecrire  $f(x, y) + 9$  comme la somme de deux carrés et en déduire que  $f$  admet  $-9$  comme valeur minimale.

**Exercice 1831** Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné.

**Exercice 1832** Soit  $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$ .

Montrer que  $f$  admet un minimum local en  $0$  suivant tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  mais n'admet pas de minimum local en  $(0, 0)$ .

**Exercice 1833** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xe^y + ye^x \end{cases}$ .

Montrer que  $(-1, -1)$  est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de  $\varphi(h) = f(-1 + h, -1 + h)$  et de  $\psi(h) = f(-1 + h, -1 - h)$ , montrer que  $f$  n'a pas d'extremum.

**Exercice 1834** Déterminer les extrémums de  $f : (x, y, z) \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ .

**Exercice 1835** Déterminer  $\max_{|z| \leq 1} |\sin z|$ . On rappelle que :  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

**Exercice 1836** Si  $f$  est concave sur un ouvert convexe  $U \subset \mathbb{R}^2$  et si :

$$\exists a \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0,$$

alors  $f$  admet un maximum local en  $a$ .

**Exercice 1837** Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$ , on définit  $\int(A)$  comme l'ensemble  $\{x \in A \mid \exists \rho > 0, B(x, \rho) \subset A\}$ . On supposera  $A$  fermée bornée et  $\int(A) \neq \emptyset$ . On suppose que  $f$  est une fonction  $C^1$  sur  $A$  telle que  $f$  est constante sur  $A \setminus \text{Int}(A)$ . Montrer qu'il existe  $z \in \text{Int}(A)$  tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(z) = 0.$$

**Exercice 1838** Chercher les extrémums sur  $\mathbb{R}^2$  des applications :

$$(x, y) \rightarrow x^4 + y^4 - 4xy;$$

$$(x, y) \rightarrow (x - y)e^{xy};$$

$$(x, y) \rightarrow xe^y + ye^x;$$

$$(x, y) \rightarrow e^{x \sin y};$$

$$(x, y) \rightarrow x^3 + y^3.$$

**Exercice 1839** Soit  $f$  une fonction réelle de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Rappeler une condition nécessaire pour que  $f$  présente un extremum local en  $(x_0, y_0)$ .  
Dans la suite de l'exercice,  $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$  vérifie cette condition, c'est-à-dire est un *point critique* de  $f$ . On pose

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}),$$

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \Delta = B^2 - AC,$$

$$R(t) = At^2 + 2Bt + C, \quad S(t) = Ct^2 + 2Bt + A.$$

2. On suppose  $\Delta < 0$  et  $A$  (ou  $C$ )  $> 0$ .
  - (a) Montrer que  $\forall t \in \mathbb{R}, R(t) \geq \delta$  et  $S(t) \geq \delta$  pour un certain  $\delta > 0$ .
  - (b) On pose  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et on suppose que  $\sin \theta \cdot \cos \theta \neq 0$ .  
Montrer successivement :

$$Q(x, y) \geq r^2 \delta \sin^2 \theta,$$

$$Q(x, y) \geq r^2 \delta \cos^2 \theta,$$

$$Q(x, y) \geq \frac{r^2}{2} \delta.$$

En déduire que

$$\forall (x, y) \quad Q(x, y) \geq \frac{r^2}{2} \text{Inf}(\delta, 2A, 2C).$$

- (c) Montrer que  $\mathbf{a}$  est un point de minimum local strict de  $f$ . On écrira pour cela la formule de Taylor-Young pour  $f$  en ce point.
3. On suppose  $\Delta < 0$  et  $A$  (ou  $C$ )  $< 0$ .  
Montrer que  $(x_0, y_0)$  est un point de maximum local strict de  $f$ .
4. On suppose maintenant  $\Delta > 0$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $S(t_1) > 0$  et  $S(t_2) < 0$ .
  - (b) Soient  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\tan \theta_1 = t_1$  et  $\tan \theta_2 = t_2$ . En examinant les fonctions

$$g(t) := f(x_0 + t \cos \theta_1, y_0 + t \sin \theta_1), \quad h(t) := f(x_0 + t \cos \theta_2, y_0 + t \sin \theta_2)$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  assez petit, montrer que  $\mathbf{a}$  n'est ni un point de maximum local, ni un point de minimum local de  $f$ .

5. Dessiner l'allure du graphe de  $f$  au voisinage du point  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$  dans les trois cas étudiés ci-dessus (questions 1, 3 et 4).
6. Que peut-on dire en général quand  $\Delta = 0$ ? Pour répondre à cette question, on pourra s'appuyer sur l'étude des deux cas suivant au voisinage de  $(0, 0)$  :

$$f_1(x, y) = x^2 + x^4 + y^4 \quad \text{et} \quad f_2(x, y) = x^2 - y^4.$$

**Exercice 1840** Existe-t-il un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné? Le déterminer par une méthode géométrique.

**Exercice 1841** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty.$$

Montrer que  $f$  est minorée et atteint sa borne inférieure.

**Exercice 1842** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $(x, y) \mapsto 6xy + (y - x)^3$ . On note  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ .

1. Dessiner  $\Delta$ . Montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes sur  $\Delta$ .
2. Calculer les extrema de  $f$  sur le bord de  $\Delta$  puis dans l'intérieur de  $\Delta$ .
3. En déduire les bornes de  $f$  sur  $\Delta$ .

**Exercice 1843** On note  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$  et  $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Soit  $f$  l'application de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(z) = |\sin z|$ .

1. Pour quelle raison  $f$  est-elle bornée sur  $D$ ? On note  $M = \sup_{z \in D} f(z)$  et  $m = \inf_{z \in D} f(z)$ . Est-ce que  $M$  et  $m$  sont atteints? Donner la valeur de  $m$ .
2. Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)$ . (On rappelle que  $\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}$  et  $\operatorname{ch} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ .)
3. En déduire que  $M$  est atteint en un point de  $S$ .
4. Montrer que  $M = \frac{e^2 - 1}{2e}$ .

**Exercice 1844** On pose  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  et calculer sa différentielle.
2. Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que  $f$  admet en tout point des dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  et calculer la valeur de ces dérivées en  $(0, 0)$ . Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles en  $(0, 0)$ ?

### 38.5 Équations aux dérivées partielles

**Exercice 1845** Résoudre à l'aide des coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Exercice 1846** Résoudre l'équation des cordes vibrantes :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  à l'aide du changement de variables  $u = \frac{x+y}{2}$  et  $v = \frac{x-y}{2}$  (on suppose que  $f$  est  $C^2$ ).

**Exercice 1847** Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = f$$

en passant en coordonnées polaires.

**Exercice 1848** Résoudre en utilisant le changement de variable  $x = u, y = uv$  l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

**Exercice 1849** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^1$  homogène de degré  $s > 0$ , i.e. telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}^2, f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Montrer que les dérivées partielles de  $f$  sont homogènes de degré  $s - 1$  et :

$$sf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

**Exercice 1850** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On pose  $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ . Calculer  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$ .

**Exercice 1851** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$ . On pose  $g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ . Calculer  $\Delta(g)$  en fonction de  $\Delta(f)$ .

**Exercice 1852** On cherche les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par  $\phi(x, y) = (x, y + x^2)$ .

1. En calculant l'application réciproque, montrer que  $\phi$  est bijective. Vérifier que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont de classe  $C^1$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Posons  $g = f \circ \phi$ .
  - (a) Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est solution de (2) si et seulement si  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ .
3. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Montrer que  $f$  vérifie (2) si et seulement s'il existe une fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(u, v) = h(v - u^2)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 1853** Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = f(e^x \sin x, \ln(1 + x^2))$ .

Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

**Exercice 1854** Soient  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$  et  $V = ]0, +\infty[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On définit la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : \quad V &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  et que  $\Psi$  est de classe  $C^1$  et bijective de  $V$  sur  $U$ . Déterminer  $\Psi^{-1}$ .
2. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $U$ . On pose

$$F(r, \theta) = f \circ \Psi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

- (a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et calculer  $\frac{\partial F}{\partial r}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$  en fonction de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- (b) Montrer que  $f$  vérifie l'équation

$$(E) \quad a \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} \arctan \left( \frac{b}{a} \right) \quad \forall (a, b) \in U$$

si et seulement si  $F$  vérifie l'équation

$$(E') \quad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0, \theta_0) \in V.$$

- (c) Déterminer toutes les fonctions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  qui vérifient l'équation (E).

**Exercice 1855** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ . On cherche les fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$  qui vérifient

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

1. Vérifier que  $\varphi(x, y) = y/x$  est solution de (E).
2. Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer que  $g \circ \varphi$  est solution de (E).
3. Soit  $f$  une solution de (E). Montrer que  $f(u, uv)$  ne dépend que de  $v$ .
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

**Exercice 1856** Déterminer les fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra effectuer le changement de variables  $u = x + y, v = x - y$ .

**Exercice 1857** Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions différentiables. En utilisant des propriétés de la différentielle, montrer que  $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$ .

### 38.6 Fonctions implicites

**Exercice 1858** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = ((x - 2)^2 + y^2 - 4)((x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} - 1).$$

1. Tracer rapidement la courbe  $C$  d'équation  $f(x, y) = 0$ .
2. En quels points de  $C$  la relation  $f(x, y) = 0$  permet-elle de définir une fonction implicite de la forme  $y = \phi(x)$ ?

**Exercice 1859** Montrer que les relations proposées définissent au voisinage du couple  $(a, b)$  indiqué une fonction implicite  $y = \phi(x)$ .

Donner un développement limité à l'ordre 3 de  $\phi$  en  $a$ .

1.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$   $(a, b) = (0, 1)$ .
2.  $f(x, y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x - y) - 2x + y^3$   $(a, b) = (1, 0)$ .

**Exercice 1860** Montrer que la relation

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z - 1 = 0$$

définit au voisinage de  $(0, 0, -1)$  une fonction implicite  $z = \phi(x, y)$ . Donner un développement limité de  $\phi$  à l'ordre 2 en  $(0, 0)$ .

### 38.7 Divers

**Exercice 1861** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admettant des dérivées partielles continues en 0 et telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \forall t > 0, f(ta) = tf(a).$$

Montrer que  $f$  est linéaire.



**Exercice 1862** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^1$  sur un ouvert convexe  $O$  telle que :

$$\forall a \in O, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

Montrer que  $f$  est constante sur  $O$ .

**Exercice 1863** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable. Montrez que si  $\|\nabla f(x)\| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

## 39 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

**Exercice 1864 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** 1. Montrer que :  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

2. Déterminer :  $m = \text{Inf}\{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n 1/x_i) \text{ tels que } x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}$

3. Déterminer :  $M = \text{Sup}\{|x + 2y + 3z + 4t| \text{ tels que } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$

**Exercice 1865 (Normes sur  $\mathbb{R}^2$ )** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $N_1(x, y) = \text{Max}(\sqrt{x^2 + y^2}, |x - y|)$  et  $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$ .

1. Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^2$  et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.

2. Montrer que  $N_2 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq N_1 \leq \|\cdot\|_1 \leq 4N_2$ .

3. Déterminer le plus petit réel  $k > 0$ , tel que  $\|\cdot\|_1 \leq kN_2$ . (utiliser Cauchy-Schwarz)

**Exercice 1866** Soient  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux familles de  $n$  nombres réels. Montrer, en

étudiant le signe du trinôme  $\lambda \rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2$  que  $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Exercice 1867** Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

1. Montrer que  $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$  est une distance sur  $E$ . Énoncer des conditions suffisantes sur une fonction  $f$ , définie de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  pour que  $(x, y) \rightarrow f(d(x, y))$  soit une distance sur  $E$ .

2. Montrer que l'application  $d''$  définie sur  $E \times E$  par  $d''(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$  est une distance sur  $E$ . *Indication* : On utilisera la croissance de la fonction  $u \rightarrow \frac{u}{1 + u}$ .

3. Comparer les distances  $d$  et  $d''$ .

4. Dans le cas où  $E$  est l'ensemble des nombres réels et où  $d$  est la distance valeur absolue, construire  $B_{d''}(0, a)$  où  $a$  est un réel.

**Exercice 1868** Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  telle qu'il existe  $k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$  tel que  $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x \in E, \forall y \in E$ .

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $(E, d)$ .

2. Soient  $x_0 \in E$  et pour  $n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $(E, d)$ .

3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire une solution de  $f(l) = l$ . Montrer que ce point fixe est unique.

4. Application : montrer que le système  $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2 \sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3 \sin x_2) \end{cases}$  admet une solution unique  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 1869** On considère les trois normes définies sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|X\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on "comparer" ces trois normes ? Ecrire les définitions des distances  $d_1, d_2$  et  $d_\infty$  associées à chacune d'entre elles.

**Exercice 1870** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définies et nées sur  $[-1, 1]$ .

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur  $E$  :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)| dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = \left( \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, +1]} \{|f(x)|\}$$

2. On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies par  $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in ]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

La suite  $f_n$  est-elle de Cauchy dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ ,  $(E, \|\cdot\|_2)$  et dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  ? Conclusions ?

**Exercice 1871** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définies, continues et dérivables sur  $[0, 1]$  et vérifiant  $f(0) = 0$ . On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que  $N_1(f) \leq N_2(f)$ . En déduire que l'application identique de  $(E, N_2)$  vers  $(E, N_1)$  est continue.
2. A l'aide de la fonction  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ , montrer que l'application identique de  $(E, N_1)$  vers  $(E, N_2)$  n'est pas continue.

**Exercice 1872** Lorsqu'un espace vectoriel  $E$  est en outre muni d'une multiplication, l'application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  est dite norme multiplicative si :

- $N$  est une norme,
- pour tous  $A$  et  $B$  dans  $E$ ,  $N(A.B) \leq N(A).N(B)$ .

Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.  $A \in E$  se note  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$

1. Montrer que  $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$  définit une norme multiplicative sur  $E$ .

2. Montrer que  $N_\infty(A) = \max_{\{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|_\infty = 1\}} \{ \|A.X\|_\infty \}$ .

3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\forall 1 \leq i \leq n, |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$  et  $D$  la matrice diagonale formée avec les éléments diagonaux de  $A$ . Soit aussi  $F$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On considère la suite des  $X^{(p)} \in \mathbb{R}^n$  définie pour  $p \geq 0$  par :

$$\begin{cases} X^{(0)} & = X_0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{(p+1)} & = (I - D^{-1}A)X^{(p)} + D^{-1}F \quad \text{pour } p \geq 0 \end{cases}$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 1873 (partiel 1999)** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $x$  un élément de  $E$  et  $A$  un compact de  $E$ .

1. Montrer que l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $y$  associe  $\|y\|$  est continue.
2. Montrer que l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $y$  associe  $\|y - x\|$  est continue.
3. Montrer que la distance de  $x$  à  $A$  est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe  $a \in A$  tel que

$$\inf_{y \in A} \|y - x\| = \|a - x\|.$$

**Exercice 1874** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. Soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que  $L$  est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de  $E$ .
2. On suppose qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Montrer que  $L$  est continue.

3. Dans la suite, on suppose que  $L$  est continue et on pose

$$K = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F.$$

- (a) Supposons que  $K = +\infty$ . Montrer qu'alors il existe une suite  $(x_n)$  dans  $E$  telle que  $\|x_n\| = 1$  pour tout  $n$  et telle que  $\|L(x_n)\|_F$  tend vers  $+\infty$ . En déduire qu'il existe une suite  $y_n$  tendant vers 0 et telle que  $\|L(y_n)\|_F = 1$ .
- (b) En déduire que  $K \in \mathbb{R}_+$  et que pour tout  $x \in E$  on a

$$\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E.$$

**Exercice 1875** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

On considère l'application  $L : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $L(f) = f(1)$ .

1. Montrer que  $L$  est une application linéaire.
2. En considérant les fonctions  $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$ , montrer que  $L$  n'est pas continue.

**Exercice 1876** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On suppose que  $(x_n)$  est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

**Exercice 1877** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit une norme sur  $E$  en posant

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)| dt.$$

On va montrer que  $E$  muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f_n \in E$  pour tout  $n \geq 1$ .
2. Montrer que

$$\|f_n - f_p\| \leq \sup\left(\frac{2}{n}, \frac{2}{p}\right)$$

et en déduire que  $(f_n)$  est de Cauchy.

3. Supposons qu'il existe une fonction  $f \in E$  telle que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $(E, \|\cdot\|_1)$ . Montrer qu'alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)| dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0$$

pour tout  $0 < \alpha < 1$ .

4. Montrer qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - 1| dt = 0$$

pour tout  $0 < \alpha < 1$ . En déduire que

$$\begin{aligned} f(t) &= -1 & \forall t \in [-1, 0[ \\ f(t) &= 1 & \forall t \in ]0, 1]. \end{aligned}$$

Conclure.

**Exercice 1878** Soit  $E = \mathbb{R}^d$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle qu'une application continue  $g$  de  $E$  dans  $E$  est dite *contractante* s'il existe  $K \in ]0, 1[$  tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

On rappelle aussi que toute application contractante admet un unique point fixe.

Soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $E$  telle qu'il existe un entier  $n$  tel que  $f^n$  soit contractante. On note  $x_0$  le point fixe de  $f^n$ .

1. Montrer que tout point fixe de  $f$  est un point fixe de  $f^n$ .
2. Montrer que si  $x$  est un point fixe de  $f^n$ , il en est de même pour  $f(x)$ .
3. En déduire que  $x_0$  est l'unique point fixe de  $f$ .

**Exercice 1879** Soit  $E = \mathbb{R}^d$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . On définit la *distance* d'un élément  $x_0$  de  $E$  à une partie  $A$  de  $E$ , notée  $d(x_0, A)$ , par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons  $A$  compact. Montrer que pour tout  $x_0 \in E$  il existe  $y \in A$  tel que  $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$ .
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que  $A$  est fermé. (On remarquera que pour toute partie  $B$  de  $A$  on a  $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$ .)
3. Montrer que l'application qui à  $x_0$  associe  $d(x_0, A)$  est continue sur  $E$  (sans aucune hypothèse sur  $A$ ).
4. En déduire que si  $A$  est un fermé de  $E$  et  $B$  un compact de  $E$  tels que  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors il existe une constante  $\delta > 0$  telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \quad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints.

**Exercice 1880**  $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$  est-elle une norme de  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 1881** 1. Montrer que  $\forall p \geq 1$ , l'application  $\left( \begin{array}{l} N_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right)$  est une norme (on utilisera la convexité de  $x^p$ ).

2. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé, montrer que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} N_p(x) = \max(x_i, 1 \leq i \leq n)$ , et que cela définit une norme, appelée **norme infinie**, et notée  $N_\infty$ .

3. Établir les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq \sqrt{n}N_2(x) \leq nN_\infty(x).$$

Que peut-on en déduire ?

4. Dessiner les boules unités des normes 1, 2, et  $\infty$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 1882** Soit  $\left( \begin{array}{l} N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sum_{k=1}^n |\sum_{i=1}^k x_i| \end{array} \right)$ . Montrer que  $N$  est une norme.

**Exercice 1883**  $A$  est dit *convexe* s'il contient tout segment reliant deux quelconques de ses points :

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} \subset A.$$

Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une norme  $N$ . Montrer que toute boule fermée (ou ouverte) est convexe et symétrique par rapport à son centre.

**Exercice 1884** Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Montrer :

$$\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2, N(x - y) \geq \frac{1}{2} \sup(N(x), N(y)) \cdot N\left(\frac{x}{N(x)} - \frac{y}{N(y)}\right).$$

**Exercice 1885** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $(a, a') \in E^2$ ,  $(r, r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ . Montrer :

1.  $B(a, r) = \{a\} + B(0, r)$
2.  $B(a, r) = B(a', r') \Leftrightarrow a = a'$  et  $r = r'$
3.  $B(a + a', r + r') = B(a, r) + B(a', r')$
4.  $B(a, r) \cap B(a', r') \neq \emptyset \Leftrightarrow \|a' - a\| < r + r'$ .

**Exercice 1886** Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel. Montrer les équivalences :

$$\begin{aligned} A \subset E \text{ est borné} &\Leftrightarrow \exists (a, r) \in E \times \mathbb{R}^+ : A \subset B(a, r) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geq 0 : A \subset B(0, R) \\ &\Leftrightarrow \exists R \geq 0 : A \subset B_f(0, R) \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inclus dans une boule de } E. \end{aligned}$$

**Exercice 1887 (Topologie du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$ )** 1. Quelles sont toutes les normes sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}$  ?

On se place désormais dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

2. Quelles sont les boules ouvertes ? fermées ?
3. Ouverts et fermés de  $\mathbb{R}$  :

- (a) soit  $(I_a)_{a \in A}$  une famille d'intervalles ouverts non vides de  $\mathbb{R}$ , deux à deux disjoints. Montrer que  $A$  est au plus dénombrable.

- (b) soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $a \in O$ . On pose  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x > a\}$  et  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin O \text{ et } x < a\}$ . Etudier l'existence de  $\inf A$  et  $\sup B$ .
- (c) en déduire que :
- tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts
  - tout fermé de  $\mathbb{R}$  est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles fermés.

**Exercice 1888** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  telles que  $f(0) = 0$ .

1. On pose pour tout  $f \in E$ ,  $N(f) = \|f\|_\infty$  et  $N'(f) = \|f'\|_\infty$ . Montrer que  $N$  et  $N'$  sont des normes.
2. Montrer que  $N$  et  $N'$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 1889** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  telles que  $f(0) = 0$ .

1. On pose pour tout  $f \in E$ ,  $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ . Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$
2. Montrer que, si  $f \in E$  alors, pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$ .
3. On pose, pour tout  $f \in E$ ,  $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$ . Montrer que  $N'$  est une norme sur  $E$ , équivalente à  $N$ .

**Exercice 1890** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . Comparer les deux assertions :

- i) Pour tout  $\varepsilon > 0$  l'ensemble  $A \cap B(x, \varepsilon)$  est infini.
- ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un élément  $y$  distinct de  $x$  dans  $A \cap B(x, \varepsilon)$ .

**Exercice 1891** Soit  $A$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  telles que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

1. On munit  $C[0, 1]$  de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Montrer que  $A$  est fermé et calculer son intérieur.
2. On munit  $C[0, 1]$  de la norme  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ . Montrer que l'intérieur de  $A$  est vide et que  $A$  est fermé.

**Exercice 1892** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\mu(E) = \sup_{x, y \in E - (0, 0)} \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)}.$$

1. Montrer que  $1 \leq \mu(E) \leq 2$ .
2. Calculer  $\mu(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\mathbb{R}^2$  est muni de la norme euclidienne puis de la norme  $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ .

**Exercice 1893** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $A = (a_{i,j})_{i,j \in 1, \dots, n} \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose :

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|=1} \|Ax\|.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur  $M_n(\mathbb{R})$ .
2. On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Montrer que  $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ .

**Exercice 1894** 1. Montrer que l'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire euclidien sur  $C[0, 1]$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles.

2. On note  $C = \{f \in C[0, 1]; \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ . Montrer que  $\inf_{f \in C} \int_0^1 f^2(t)dt = 1$  et que cette borne inférieure est atteinte.

**Exercice 1895** On munit  $C[0, 1]$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

1. Soit  $\varphi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. On pose  $N(\varphi) = \sup_{f \in C[0, 1]; \|f\|_\infty = 1} |\varphi(f)|$ .

Montrer que  $\varphi$  est continue si et seulement si  $N(\varphi)$  est fini.

2. Calculer  $N(\psi)$  lorsque  $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$ .

3. Posons, pour toute fonction  $f \in C[0, 1] : \varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$ . Montrer que  $N(\varphi) = 1$ .

**Exercice 1896** On munit  $E$ , l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles telles que  $f(0) = 0$  de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

1. Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. On pose  $N(\varphi) = \sup_{f \in E; \|f\|_\infty = 1} |\varphi(f)|$ . Montrer que

$\varphi$  est continue si et seulement si  $N(\varphi)$  est fini. Montrer que  $\varphi \mapsto N(\varphi)$  est une norme sur l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $E$ .

2. Calculer  $\mu = N(\psi)$  lorsque  $\psi$  est définie en posant, pour toute fonction  $f \in E : \psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$ .

3. Peut-on trouver une fonction  $f \in E$  telle que  $|\psi(f)| = \mu$  et  $\|f\|_\infty = 1$  ?

**Exercice 1897** On munit  $E = C^1[0, 1]$  et  $F = C[0, 1]$  de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

1. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire. On pose  $N(\varphi) = \sup_{f \in E; \|f\|_\infty = 1} |\varphi(f)|$ . Montrer que

$\varphi$  est continue si et seulement si  $N(\varphi)$  est fini.

2. Montrer que l'application  $f \mapsto f'$  n'est pas continue.

**Exercice 1898** Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ .

1. Soient  $x, y \in E$  et  $I$  le segment  $[x, y]$ . Calculer  $S \cap I$ .

2. Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  sont-elles euclidiennes ?

**Exercice 1899** 1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une suite de matrices  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  inversibles convergeant vers  $A$  (en un sens que l'on précisera).

2. Soit  $N \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente. Calculer les valeurs propres de  $N$ . Montrer que  $\det(I + N) = 1$ .

3. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $AN = NA$ . Calculer  $\det(A + N)$ .

**Exercice 1900**

## I Préliminaires

1. Soit  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\mathcal{P}$  est de dimension infinie.
2. Soit  $X$  une partie bornée de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\sup(X) = \sup \bar{X}$ .

## II

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire telles qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . On note  $\mathbb{C}^1$  l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que  $\mathcal{L}$  est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , que  $\mathcal{L}$  contient  $\mathbb{C}^1$  et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout  $f \in \mathcal{L}$  :

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y) \in [0,1]^2, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x \in ]0,1]} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y) \in [0,1]^2, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

- (a) Montrer que  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  et  $\lambda$  sont des normes sur  $\mathcal{L}$ .
  - (b) En considérant la suite  $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ , montrer que  $N_2$  n'est pas équivalente à  $\| \cdot \|_\infty$ .
  - (c) Montrer que  $N_1$  n'est équivalente ni à  $\| \cdot \|_\infty$ , ni à  $N_2$ .
  - (d) Construire une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{L}$  qui converge vers 0 pour  $\| \cdot \|_\infty$  mais pas pour  $N_2$ . En déduire (de nouveau) que  $N_2$  n'est pas équivalente à  $\| \cdot \|_\infty$ .
  - (e) Montrer que  $\lambda$  et  $N_1$  sont équivalentes.
3. On pose, pour tout  $f \in \mathbb{C}^1$  :  $\nu_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$  et  $\nu(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ .
    - (a) Montrer que  $\nu_1$  et  $\nu$  sont des normes sur  $\mathbb{C}^1$ .
    - (b) Montrer que  $\nu_1(f) = N_1(f)$ , pour tout  $f \in \mathbb{C}^1$ .
    - (c) Les normes  $\nu$  et  $\nu_1$  sont-elles équivalentes ?
  4. Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé. Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est dite de *Cauchy* si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que, si  $m, n \geq N$  alors  $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ . On dit que  $(E, \| \cdot \|)$  est *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente. On rappelle que  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $x \mapsto |x|$  est complet.
    - (a) Soit  $C^0$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $(C^0, \| \cdot \|_\infty)$  est complet.
    - (b) L'espace vectoriel normé  $(\mathbb{C}^1, \nu)$  est-il complet ? Qu'en est-il de  $(\mathbb{C}^1, \nu_1)$  ?
    - (c) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $(\mathcal{L}, \lambda)$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction continue  $f$ .



- (d) Démontrer que pour  $n$  assez grand  $f - f_n$  est lipschitzienne.  
 (e) En déduire que  $(\mathcal{L}, \lambda)$  est complet.

### III

On munit  $\mathbb{C}^1$  d'une norme  $N$  et  $C^0$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ . On note  $d$  l'application  $f \mapsto f'$  de  $\mathbb{C}^1$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^0$ .

1. Soit  $\varphi : \mathbb{C}^1 \rightarrow C^0$  une application linéaire. On pose  $N(\varphi) = \sup_{f; N(f) \leq 1} \|\varphi(f)\|_\infty$ . Démontrer que  $\varphi$  est continue si et seulement si  $N(\varphi)$  est fini. Vérifier que  $N$  est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de  $\mathbb{C}^1$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^0$ .
2. Montrer que l'application  $d$  n'est pas continue si  $N = \| \cdot \|_\infty$ .
3. On munit  $\mathbb{C}^1$  de la norme  $\nu$ . Montrer que  $d$  est continue et calculer  $N(d)$ .

[Exercice corrigé]

## 40 Suites dans $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1901** Soit  $x_n$  une suite de  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que l'ensemble  $A$  des valeurs d'adhérence de  $x_n$  est fermé. Indication : prouver que le complément de  $A$  est ouvert.

**Exercice 1902** Soit  $x_n$  une suite bornée de  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que  $x_n$  converge si et seulement si  $A$  est un singleton. Indication : pour prouver la convergence, utiliser qu'une suite bornée de  $\mathbb{R}^d$  a au moins une valeur d'adhérence.

**Exercice 1903** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Soit  $x_n$  la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que  $\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0$ . Montrer que si  $a \in A$  alors  $f(a) = a$ .

Indication : appliquer la définition de la continuité de  $f$  en  $a$  en termes de limites.

**Exercice 1904** Soit  $x_n$  une suite bornée de  $\mathbb{R}^d$ . Supposons que  $\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0$ . Montrer que l'ensemble  $A$  est non-vide, compact, connexe.

Indication : pour la connexité, supposer que  $A = A_1 \cup A_2$  avec  $A_1$  et  $A_2$  non-vides, disjoints, fermés.

Si  $d = 1$  conclure que  $A = [a, b]$  avec  $a \leq b$ .

**Exercice 1905** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $x_n$  la suite définie par

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Supposons que  $x_n$  est bornée. Montrer que  $x_n$  converge si et seulement si

$$\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0.$$

Indication. Montrer qu'il suffit de prouver que  $a = b$  dans  $[a, b] = A$ . Si  $a < b$  montrer que la suite est stationnaire.

**Exercice 1906** Soit  $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k$  et  $x_n = \cos(s_n)$ . Montrer qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Indication : montrer que  $\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0$  mais que  $x_n$  ne converge pas.

## 41 Intégrales multiples

**Exercice 1907** Calculer  $I_1 = \iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ .

Calculer  $I_2 = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 < x, x^2 + y^2 > y\}$ .

Calculer  $I_3 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$  où  $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2/x^2 + y^2 \geq 1\}$ .

Calculer  $I_4 = \iint_D \frac{1}{y \cos(x)+1}dxdy$  où  $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$ .

Calculer  $I_5 = \iiint_D z dxdydz$  où  $D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3/y^2 + z \leq 1, x^2 + z \leq 1\}$ .

Calculer  $I_5 = \iint_D xy dxdy$  où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  avec  $a, b > 0$ .

**Exercice 1908** Représenter et calculer le volume de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/-1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}$ .

**Exercice 1909** Déterminer le centre de gravité du culbuto (homogène), *i.e.* le cône

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

auquel on adjoint sur sa base une demi-boule.

**Exercice 1910** Soit  $D = [0, 1]^2$ . Calculer :

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}.$$

**Exercice 1911** Soit  $D$  le disque de centre  $(0, 1)$  et de rayon 1 du plan. Calculer :

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

**Exercice 1912** Soit  $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 - 2y \geq 0, x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ . Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

**Exercice 1913** Soit  $D = \{(x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$ . Calculer :

$$\iint_D \sqrt{xy} dx dy.$$

**Exercice 1914** Soient  $a, b > 0$ . Calculer l'aire de l'ellipse  $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  par deux méthodes différentes.

(On rappelle que l'aire d'un domaine  $D$  vaut  $\iint_D dx dy$ .)

**Exercice 1915** Soit  $a > 0$  et  $D$  le domaine délimité par la courbe d'équation polaire  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ . Calculer l'aire de  $D$ .

**Exercice 1916** Soient  $0 < a \leq b, 0 < c \leq d$ , et  $D = \{ax^2 \leq y \leq bx^2, \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x}\}$ . Calculer l'aire de  $D$ .

(Indication : poser  $u = \frac{y}{x^2}$  et  $v = xy$ .)

**Exercice 1917** Soit  $p > 0$  et  $D = \{y^2 - 2px \leq 0, x^2 - 2py \leq 0\}$ . Calculer :

$$\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dx dy.$$

(Indication : poser  $x = u^2v$  et  $y = uv^2$ .)

**Exercice 1918** Soit  $R > 0$ ,  $D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$  et  $K_R = [0, R]^2$ . Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

**Exercice 1919** Soient  $a, R > 0$ . Dans le plan  $(yOz)$ , soit  $D$  le disque de centre  $(0, a, 0)$  et de rayon  $R$ . En tournant autour de l'axe  $(Oz)$ , le disque  $D$  engendre un domaine  $T$  (appelé un tore plein). Calculer le volume de  $T$  (c'est-à-dire l'intégrale triple  $\iiint_T dx dy dz$ ).

**Exercice 1920** Soit  $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2 + y^2\}$ . Calculer le volume de  $D$ .

**Exercice 1921** Soit  $D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ . Calculer :

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

**Exercice 1922** Quel est le volume délimité par deux cylindres de révolution d'axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  et de même rayon  $R > 0$  ?

**Exercice 1923** En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de  $f$  sur  $D$  avec

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ ;  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  avec  $a, b > 0$ ;  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;
3.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $h > 0$ ;  $f(x, y, z) = z$ ;
4.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leq y \leq 2x^2, 1/x \leq y \leq 2/x\}$ ;  $f(x, y) = x + y$  (changement de variable  $u = y/x^2, v = xy$ );
5.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ;  $f(x, y, z) = xyz$ ;
6.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ ;  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ .

**Exercice 1924** Identifier les ensembles suivants et calculer leur aire s'ils sont dans  $\mathbb{R}^2$ , leur volume s'ils sont dans  $\mathbb{R}^3$ .

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  avec  $a, b > 0$ ;
2.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$  avec  $a, b, c > 0$ ; qu'obtient-on dans le cas particulier où  $D$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^3$  ?
3.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $R, h > 0$ ;
4.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ;
5.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2/h^2, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $h > 0$ .

**Exercice 1925** Calculer les coordonnées du centre d'inertie (de gravité) du domaine  $D$  :

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  (le quart d'ellipse);
2.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \leq ax\}$ ;
3.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$ .

**Exercice 1926** 1. **Théorème de Guldin** Soit  $D_0$  un domaine tracé dans le demi-plan  $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$ . Si l'on fait tourner  $D_0$  autour de l'axe  $Oz$ , on obtient un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ . En utilisant les coordonnées cylindriques, montrer que

$$\text{Vol}(D) = 2\pi \text{Aire}(D_0) \cdot x_G,$$

où  $(x_G, z_G)$  sont les coordonnées du centre d'inertie du domaine  $D_0$ .

2. Calculer les volumes des domaines suivants :

(a) le tore obtenu en faisant tourner autour de  $Oz$  le domaine  $D_0 = \{(x, 0, z) \mid \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\}$ , où  $a < c$ ;

(b)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , où  $R > 0$ .

**Exercice 1927** On pose  $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  et  $J = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy$ . Calculer  $J$  et en déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice 1928** On note  $D$  le domaine délimité par les droites  $x = 0$ ,  $y = x + 2$  et  $y = -x$ .

1. Calculer (directement)  $I = \iint_D (x - y) dx dy$ .

2. Calculer  $I$  au moyen du changement de variable  $u = x + y$  et  $v = x - y$ .

**Exercice 1929** Soit  $D = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Calculer  $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$ .

## 42 Séries numériques, séries de Fourier

### 42.1 Séries numériques

**Exercice 1930** Soient, pour  $n > 0$ ,  $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$  et  $v_n = \ln u_n$ .

1. Etudier la série de terme général  $w_n$  où, pour  $n \geq 2$ ,  $w_n = v_n - v_{n-1}$  et  $w_1 = v_1$ .

2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de  $w_n$ , que la suite  $u_n$  converge vers  $\lambda > 0$ .

3. Déterminer  $\lambda$  en utilisant la formule de Wallis :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$ . En déduire un équivalent de  $n!$ .

*Indication* : Exprimer  $n!$  (respectivement  $(2n)!$ ) en fonction de  $u_n$  (resp. de  $u_{2n}$ ) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

**Exercice 1931** Soit  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ . Donner une valeur approchée de  $S$  en garantissant une erreur inférieure ou égale à  $10^{-3}$ .

**Exercice 1932** Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0, b > 0.$$

*Indication* : Chercher un équivalent suivant les valeurs de  $b$ .

**Exercice 1933 (Utilisation des règles de Cauchy et d'Alembert)** Etudier les séries de termes généraux

1.

$$u_n = \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$

2.

$$v_n = e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}$$

**Exercice 1934 (Comparaison à des séries de Riemann et équivalent)** Etudier les séries de termes généraux

1.

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right) \text{ avec } a > 0$$

2.

$$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$

3.

$$w_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

**Exercice 1935** Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs, on suppose que  $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$  et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \text{ où } \alpha > 0 \quad \beta > 1.$$

On pose  $v_n = n^\alpha u_n$ . Etudier  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  et montrer que  $(v_n)$  a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!} \sin 1 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**Exercice 1936** Déterminer la nature de la série de terme général :

1.  $\frac{n!}{n^n}$ ,  $(\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$ ,  $n^{-(1+(1/n))}$
2.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ,  $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ ,  $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$

**Exercice 1937** Etudier, suivant les valeurs de  $p \in \mathbb{N}$ , la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}.$$

**Exercice 1938** Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1.  $\sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}$
2.  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
3.  $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$

**Exercice 1939** Soit  $(u_n)$  une suite réelle positive et  $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ . Comparer la nature des séries

$(\sum u_n)$  et  $(\sum \frac{u_n}{S_n})$ .

**Exercice 1940 (Séries à termes quelconques)** Etudier les séries de termes généraux

1.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

2.

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

3.

$$w_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent être fructueux ...

**Exercice 1941 (Utilisation d'une série)** Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}$ . Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^4 \sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer  $u_n$  en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi+x)^4 \sin^2 x}$$

Encadrer ensuite  $u_n$  par les termes de la suite  $v_n$  où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1+(n\pi)^4 \sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale  $v_n$  et en déduire un équivalent de  $u_n$ . Conclure.

**Exercice 1942** Soit  $u_n$  une suite décroissante à termes positifs. On suppose  $(\sum u_n)$  converge. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nu_n) = 0.$$

Indication : Encadrer  $\sum_{p+1}^n u_k$  pour  $n > p$ . Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilon.

**Exercice 1943** Soient  $\sum_{n \geq 0} u_n$ ,  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.

**Exercice 1944 (Examen 2000)** En justifiant votre réponse, classer les dix séries  $\sum u_n$  suivantes en 4 catégories

- GD : celles telles que  $u_n$  ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que  $\lim u_n = 0$  ;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que  $\sum u_n$  est SC, il faut montrer que  $\sum u_n$  converge et que  $\sum |u_n|$  diverge.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2; \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1000}{3^n + 1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n}); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \frac{1}{3^{n-k}} \right). \end{aligned}$$

**Exercice 1945 (Examen 2000)** 1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Montrer la convergence des deux séries  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right)$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right)$  et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

- Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{4x^3-x}$ .
- Montrer la convergence de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$  et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
- L'intégrale impropre  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3-x}$  converge t-elle? Si oui, la calculer.

**Exercice 1946 (Examen 2000)** Soit  $a > 0$  fixé. Pour  $n$  entier positif ou nul on définit  $P_n(a)$  par  $P_0(a) = 1$ ,  $P_1(a) = a$ ,  $P_2(a) = a(a+1)$  et, plus généralement  $P_{n+1}(a) = (n+a)P_n(a)$ . Montrer que

$$L(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$$

existe et est un nombre strictement positif. Méthode : considérer la série de terme général pour  $n > 0$  :  $u_n = \log(n+a) - a \log(n+1) + (a-1) \log n$ , comparer sa somme partielle d'ordre  $n-1$  avec  $\log \frac{P_n(a)}{n!n^{a-1}}$ , et, ... l'aide d'un développement limité en  $1/n$  d'ordre convenable, montrer que,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge.

**Exercice 1947** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels ou complexes tels que  $\alpha\beta = -1$  et  $|\alpha| > 1 > |\beta|$ . Pour  $n$  dans l'ensemble  $\mathbf{Z}$  des entiers positifs ou négatifs on pose  $F_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$  et  $L_n = \alpha^n + \beta^n$  (si  $\alpha + \beta = 1$  ces nombres sont appelés entiers de Fibonacci (1225) et de Lucas (1891)).

- Montrer par le critère de D'Alembert que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}}$  converge et calculer la limite de  $Q_n = L_n/F_n$  si  $n \rightarrow +\infty$ .
- On admet (identité de Backstrom (1981)) que pour tous  $n$  et  $k$  de  $\mathbf{Z}$  on a

$$\frac{1}{F_{4n-2k-1} + F_{2k+1}} + \frac{1}{F_{4n+2k+1} + F_{2k+1}} = \frac{1}{2L_{2k+1}} (Q_{2n+2k+1} - Q_{2n-2k-1}).$$

En faisant  $k = 0$  dans cette identité, calculer la somme partielle d'ordre  $2n$  de la série initiale, c'est à dire  $s_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{F_{2j+1}}$  en montrant par récurrence sur  $n$  que  $s_{2n} = \frac{1}{2L_1}(Q_{2n+1} - Q_1)$ . En déduire la somme de la série en termes de  $\alpha$  et  $\beta$ . Donner une expression simple du terme général de la série et de sa somme si  $\alpha = \exp t$  et  $\beta = -\exp(-t)$  si  $t$  est réel.

3. Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1} + F_3}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 1948 (Permutation dans la série harmonique alternée : Pringsheim (1883))**

Pour tout entier  $n > 0$ , soit  $u(n) = (-1)^n/n$ . Soit  $\sigma$  une permutation des entiers  $> 0$  et soit  $\tau$  la permutation réciproque. On suppose de plus que

(1) pour tout entier  $p > 0$  on a  $\tau(2p-1) < \tau(2p+1)$  et  $\tau(2p) < \tau(2p+2)$ .

(2) Notant par  $p(n)$  le nombre d'entiers  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n$  et  $\sigma(k)$  est pair, alors  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/n$  existe et est dans  $]0, 1[$ .

1. Dans le cas particulier où  $\sigma$  est définie par

$$\sigma(3p) = 2p, \quad \sigma(3p+1) = 4p+1, \quad \sigma(3p+2) = 4p+3$$

pour tout entier  $p > 0$ , calculer explicitement  $\tau$ , et vérifier que  $\sigma$  satisfait (1) et (2), en calculant  $p(n)$  pour tout  $n$  ainsi que  $\alpha$ .

2. On note  $f(n) = \sum_{k=1}^n 1/k - \log n$ , et on rappelle le fait, vu en cours, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \gamma$  existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour  $\sigma$ , on considère la série de terme général  $v_n = u(\sigma(n))$  et on note  $s_n = v_1 + \dots + v_n$ .

3. Montrer par récurrence que  $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$  et que

$$s_n = \frac{1}{2}f(p(n)) + \frac{1}{2}f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2} \log \frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$

En déduire que  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  converge et calculer sa somme en fonction de  $\alpha$ .

**Exercice 1949** Soit  $0 < a < b$  et  $(u_n)_{n \geq 0}$  défini par  $u_0 = 1$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$  pour  $n \geq 0$ . Montrer que la limite de la suite  $S_n = \log(n^{b-a}u_n)$  existe et est finie. En déduire les valeurs de  $a$  et  $b$  telles que la série  $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$  converge. Calculer alors sa somme : pour cela expliciter sa somme partielle  $s_n$ , en montrant d'abord que pour tout  $n$  on a

$$\sum_{j=0}^n [(j+1) + b - 1]u_{j+1} = \sum_{j=0}^n [j+a]u_j.$$

## 42.2 Séries de Fourier

**Exercice 1950** Soit  $f$  une fonction intégrable au sens de Riemann périodique de période  $2\pi$ .

On désigne par  $:\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  sa série de Fourier et on pose, pour tout

$$n \in \mathbb{N} : S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. Soit  $\theta \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ . Montrer  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$ .

2. Etablir que  $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-t)}{2 \sin \frac{(x-t)}{2}} f(t) dt$ .

3. En déduire  $S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\theta) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta$ .

4. Calculer  $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta$ .



**Exercice 1951** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = |x|$  si  $|x| \leq \pi$ .

1. Déterminer la série de Fourier de  $f$ .

2. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx$ . En déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ .

3. Calculer  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

4. Montrer que  $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$ . En déduire les valeurs de  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$  puis

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

**Exercice 1952** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f(x) = x^2$  si  $|x| \leq \pi$ .

1. Déterminer la série de Fourier de  $f$ .

2. Calculer  $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx$ . En déduire la valeur de  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

3. Montrer que  $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ . En déduire  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 1953** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique,  $C^2$  et telle que  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$  et,  $\forall t \in [0, 2\pi], |f(t)| \geq |f''(t)|$ . On note respectivement  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(c''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier (complexes) de  $f$  et  $f''$ .

1. Calculer  $c_0$  puis calculer  $c''_n$  en fonction de  $c_n$ .

2. A l'aide du théorème de Parseval, en déduire que  $c_n = 0$  pour  $|n| \geq 2$ .

3. Montrer qu'il existe  $\varphi \in [0, 2\pi]$  et  $\rho \in \mathbb{R}_+$  tels que  $f(t) = \rho \cos(t + \varphi)$  pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Exercice 1954** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique,  $C^1$  et telle que  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . On note respectivement  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(c'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier (complexes) de  $f$  et  $f'$ .

1. Calculer  $c_0$  puis donner une relation entre  $c_n$  et  $c'_n$ .

2. En déduire que  $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ .

3. Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

**Exercice 1955** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} : xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{(1+t^2)^2} dt$ .

2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  puis, en dérivant l'expression ci-dessus, que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f''(x) = f(x)$ .

3. Donner une expression de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

## Septième partie

# GÉOMÉTRIE

### 43 Géométrie affine

#### 43.1 Droites, triangles,...

**Exercice 1956** Soit  $P$  un plan muni d'un repère  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans  $R$ .

1. Donner un vecteur directeur, la pente et des représentations cartésiennes et paramétriques des droites  $(AB)$  suivantes :
  - (a)  $A(2, 3)$  et  $B(-1, 4)$
  - (b)  $A(-7, -2)$  et  $B(-2, -5)$
  - (c)  $A(3, 3)$  et  $B(3, 6)$ .
2. Donner des représentations cartésiennes et paramétriques des droites passant par  $A$  et dirigées par  $\vec{u}$  avec :
  - (a)  $A(2, 1)$  et  $\vec{u}(-3, -1)$
  - (b)  $A(0, 1)$  et  $\vec{u}(1, 2)$
  - (c)  $A(-1, 1)$  et  $\vec{u}(1, 0)$ .
3. Donner des représentations paramétriques et cartésiennes (que l'on pourra déduire des paramétriques) des droites définies comme suit :
  - (a) passant par le point  $(0, 4)$  et de pente 3,
  - (b) passant par le point  $(2, -3)$  et parallèle à l'axe des  $x$ ,
  - (c) passant par le point  $(-2, 5)$  et parallèle à la droite  $D : 8x + 4y = 3$ ,
  - (d) passant par le point  $(1, 0)$  et parallèle à la droite  $D : x - y + 5 = 0$ .

**Exercice 1957** 1. Les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $P$  sont-ils alignés? Si oui donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.

- (a)  $A(-3, 3)$ ,  $B(5, 2)$  et  $C(2, 1)$ ,
  - (b)  $A(1, 1)$ ,  $B(-2, 2)$  et  $C(2, 1)$ ,
  - (c)  $A(4, -3)$ ,  $B(0, -1)$  et  $C(2, -2)$ ,
  - (d)  $A(2, -1)$ ,  $B(1, -2)$  et  $C(-3, 4)$ .
2. Dans les cas suivant, donner un vecteur directeur de  $D$  et déterminer si le point  $C$  appartient ou non à  $D$ 
    - (a)  $(D) : 3x + 5y + 1 = 0$ ,  $C(3, -2)$ .
    - (b)  $(D) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$ ,  $C(5, 3)$ .

**Exercice 1958** Dans l'exercice suivant, on considère des couples de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

1.  $(D_1) : 3x + 5y - 2 = 0$  et  $(D_2) : x - 2y + 3 = 0$
2.  $(D_1) : 2x - 4y + 1 = 0$  et  $(D_2) : -5x + 10y + 3 = 0$
3.  $(D_1) : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases}$  et  $(D_2) : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = 2 + 3s \end{cases}$
4.  $(D_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$  et  $(D_2) : \begin{cases} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{cases}$
5.  $(D_1) : x - 2y + 3 = 0$  et  $D_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$
6.  $(D_1) : 3x - 2y + 1 = 0$  et  $(D_2) : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

**Exercice 1959** On considère les deux droites du plan  $D : 2x - 3y + 4 = 0$  et  $D' : x + 3y + 1 = 0$ . On considère le point  $A$ , intersection des deux droites et le point  $B$  de coordonnées  $(3, 8)$ . Donner une équation de  $(AB)$ .

**Exercice 1960** On considère le triangle  $ABC$  dont les côtés ont pour équations  $(AB) : x + 2y = 3$ ,  $(AC) : x + y = 2$ ,  $(BC) : 2x + 3y = 4$ .

1. Donner les coordonnées des points  $A, B, C$ .
2. Donner les coordonnées des milieux  $A', B', C'$  de  $(BC), (AC)$  et  $(AB)$  respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

**Exercice 1961 (Médianes)** On considère dans  $P$  trois points  $A, B$  et  $C$ .

1. Déterminer dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$  des équations pour les médianes du triangle  $ABC$ .
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

**Exercice 1962 (Théorème de Menelaüs)** Dans le triangle  $ABC$ , on considère trois points  $P, Q, R$ , sur les côtés  $(BC), (AC)$  et  $(AB)$  respectivement, ces points n'étant pas les points  $A, B$  ou  $C$ . Montrer que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$$

**Exercice 1963 (Théorème de Pappus)** Soient  $(A_1, A_2, A_3)$  et  $(B_1, B_2, B_3)$  deux systèmes de trois points alignés. Montrer que les points  $C_1, C_2$  et  $C_3$ , intersections des droites  $(A_2B_3)$  et  $(A_3B_2)$ ,  $(A_3B_1)$  et  $(A_1B_3)$ ,  $(A_1B_2)$  et  $(A_2B_1)$  (que l'on suppose exister) sont alignés.

**Exercice 1964 (Théorème de Ceva)** Dans le triangle  $ABC$ , on considère trois points  $P, Q, R$ , sur les droites  $(BC), (AC)$  et  $(AB)$  respectivement, ces points n'étant pas les points  $A, B$  ou  $C$ . Montrer que les droites  $(AP), (BQ)$  et  $(CR)$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

## 43.2 Convexes

**Exercice 1965** Montrer que l'intersection de deux parties convexes est convexe. Est-ce vrai pour l'union ?

**Exercice 1966** Soient  $C$  et  $C'$  deux ensembles convexes d'un espace affine, montrer que

$$D = \left\{ \frac{M + M'}{2} \mid (M, M') \in C \times C' \right\}$$

est convexe.

**Exercice 1967** On appelle enveloppe convexe  $co(A)$  d'une partie non vide  $A$  d'un espace affine  $E$  l'intersection des ensembles convexes contenant  $A$ ; c'est le plus petit ensemble convexe contenant  $A$ . Montrer que c'est aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de  $A$ . Que sont  $co(\{A, B\})$ ,  $co(\{A, B, C\})$  ?

**Exercice 1968** Un cône d'un espace vectoriel est une partie  $K$  telle que :

$$\forall x \in K, \forall t \geq 0, tx \in K.$$

Montrer qu'un cône est convexe si et seulement si il est stable par addition.

**Exercice 1969** Trouver les parties  $C$  convexes de  $\mathbb{R}^2$  telles que le complémentaire  ${}^cC$  soit aussi convexe.

**Exercice 1970** Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$ , et  $(x_1, \dots, x_n)$  des points de  $E$ . On considère une combinaison convexe de points de  $A$ , sous ensemble de  $E$  :

$$x = \sum_{i=1}^m t_i x_i \text{ avec } \forall i \in \{1, \dots, m\} : t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^m t_j = 1.$$

Montrer qu'on peut écrire :

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} g_k x_k \text{ avec } \forall k \in \{1, \dots, n+1\} : g_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} g_k = 1.$$

Ainsi il suffit de  $n+1$  points dans un espace de dimension  $n$  pour écrire une combinaison convexe.

### 43.3 Divers

**Exercice 1971** Une bimédiane d'un tétraèdre est une droite qui passe par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les trois bimédianes sont concourantes.

**Exercice 1972** Soient  $A, B, C$  trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ .

**Exercice 1973** Soit  $R_1 = (0, e_1, e_2, e_3)$  un repère cartésien d'un espace affine. Soient  $O' = (1, 0, 0)$ ,  $e'_1 = e_1 + e_2$ ,  $e'_2 = e_1 - e_2$ ,  $e'_3 = e_3$  et  $R_2 = (O', e'_1, e'_2, e'_3)$ . Déterminer les coordonnées d'un point dans  $R_2$  en fonction de ses coordonnées dans  $R_1$ .

**Exercice 1974** Soient  $(D_i)_{i=1..4}$  quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en  $A$  et les deux autres en  $B$ , on dit que  $[AB]$  est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

**Exercice 1975** 1. Soient  $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1..3}$  trois droites du plan affine. Montrer

$$\text{qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Soient  $(D_1 : x + 2y = 1)$ ,  $(D_2 : x + y = 2)$ ,  $(D_3 : 2x + y = 3)$ ,  $(D_4 : 3x + 2y = 1)$ . Déterminer une équation de la droite  $D$  qui passe par  $D_1 \cap D_2$  et  $D_3 \cap D_4$  sans calculer ces points d'intersection.

**Exercice 1976** Soient  $A, B, C$  trois points non alignés d'un plan affine.

1. Soit  $f$  une application affine telle que  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  et  $f(C) = C$ . Montrer que  $f = id$ .
2. Soient  $f$  et  $g$  affines telles que  $f(A) = g(A)$ ,  $f(B) = g(B)$  et  $f(C) = g(C)$ . Que peut-on dire ?
3. Soit  $f$  affine telle que  $f(A) = B$ ,  $f(B) = C$  et  $f(C) = A$ . Que peut-on dire ?

**Exercice 1977** Soit  $E$  un espace affine et  $f$  une application affine de  $E$  dans  $E$ .

1. Montrer que  $f$  est une translation ssi  $\vec{f} = id$ .
2. Montrer que si  $\vec{f} = \lambda id$  où  $\lambda \neq 1$  alors  $f$  est une homothétie (on montrera que  $f$  admet un point fixe).
3. On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des translations. Montrer que  $\mathcal{T}$  est un sous-groupe du groupe affine.
4. On note  $\mathcal{H}$  l'ensemble des homothéties bijectives. Montrer que  $\mathcal{T} \cup \mathcal{H}$  est un sous-groupe du groupe affine.

**Exercice 1978** Soient  $f$  et  $g$  deux applications affines de  $E$  dans  $E$  telles que  $\vec{f} = \vec{g}$ . Montrer qu'il existe  $u \in \vec{E}$  tel que  $f = t_u \circ g$  où  $t_u$  est la translation de vecteur  $u$ . Que peut-on dire si de plus il existe  $M \in E$  tel que  $f(M) = g(M)$  ?

**Exercice 1979** Reconnaitre les application affines de  $\mathbb{R}^3$  suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + 2y - 2z - 2 \\ -3y + 2z + 6 \\ -4y + 3z + 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{3y}{2} - \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Exercice 1980** Soit  $E$  un espace affine,  $f$  une application affine de  $E$  dans  $E$  et

$$F = \{M \in E / f(M) = M\}.$$

On suppose que  $F \neq \emptyset$ .

1. Montrer que  $\vec{F} = \ker(\vec{f} - id)$ .
2. On suppose que  $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$ . Soit  $s$  la projection affine sur  $F$  parallèlement à  $\ker(\vec{f})$ . Montrer que  $f = s$ .
3. Faire la même chose si  $\vec{f} \circ \vec{f} = id$ .

**Exercice 1981** Soit  $E$  un espace affine et  $f$  une application affine de  $E$  dans  $E$ .

1. Montrer que si  $f \circ f = f$  alors  $f$  est une projection affine.
2. Montrer que si  $f \circ f = id$  alors  $f$  est une symétrie affine.

## 44 Isométries vectorielles

**Exercice 1982** Compléter  $x_1 = (1, 2, 1)$  en base orthogonale directe de  $\mathbb{R}^3$  euclidien canonique.

**Exercice 1983** Montrer que  $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^3 \quad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0$ .

**Exercice 1984** Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 3 et  $a \in E$ .

Soit  $f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \wedge a \end{cases}$ .  $f$  est-elle linéaire, bijective ? Comparer  $f^3$  et  $f$ .

**Exercice 1985** Soient  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Discuter et résoudre l'équation  $a \wedge x = b$ .

**Exercice 1986** Soit  $R$  le rotation vectorielle d'angle  $\theta$  et d'axe orienté par le vecteur unitaire  $k$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^3$   $R(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)k \wedge x + 2(x|k) \sin^2(\frac{\theta}{2})k$ .

**Exercice 1987** Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  du retournement d'axe  $\mathbb{R}(1, 2, 1)$ .

**Exercice 1988** Reconnaître les transformations géométriques dont les matrices respectives dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  sont :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1989** Soit  $R$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$  d'axe  $\mathbb{R}u$  et d'angle  $\theta$  et  $r$  une rotation quelconque. Déterminer  $rRr^{-1}$ . En déduire que le centre de  $SO_3(\mathbb{R})$  est biennn (le centre est l'ensemble des rotations qui commutent avec toutes les autres).

**Exercice 1990** On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté  $\mathbb{R}^3$ . Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  et  $p = [a, b, c]$  le produit mixte de  $a, b$  et  $c$ . Exprimer à l'aide de  $p$  les quantités suivantes

1.  $s = [a + b, b + c, c + a]$ ,
2.  $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$ .

## 45 Géométrie affine euclidienne

### 45.1 Géométrie dans le plan

**Exercice 1991** On considère les droites  $D : x + 2y = 5$  et  $D' : 3x - y = 1$  et on note  $A$  l'intersection des deux droites et  $B$  le point de coordonnées  $(5, 2)$ .

1. Donner une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .
2. Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à  $D$  passant par  $B$ .
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle à  $D'$  passant par  $B$ .
4. Soit  $C$  le point de coordonnées  $(2, -7)$ . Donner une équation cartésienne de la médiatrice  $\Delta$  du segment  $[B, C]$ .  $\Delta$  est-elle parallèle à  $D$  ? Et à  $D'$  ?

**Exercice 1992** 1. On considère la famille des droites  $D_\lambda : x + \lambda y + 1 = 0$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point  $A$  dont on donnera les coordonnées.
- (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.
- (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.
- (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite  $\Delta$  d'équation  $2x - 3y + 1 = 0$  ? Si oui donner des équations de ces droites.

2. On considère la famille de droites  $D_m : (2m - 1)x + (3 - m)y + m + 1 = 0, m \in \mathbb{R}$ .  
Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à  $(\Delta) : x + y - 1 = 0$ ? Si oui, laquelle?

**Exercice 1993** On considère les trois points de  $P : A(2, -3), B(0, -1)$  et  $C(-2, -5)$ .

- Dessiner le triangle  $ABC$  puis calculer son aire.
- Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $H$ , du centre du cercle circonscrit  $\Omega$  et du centre de gravité  $G$  de  $ABC$ .
- Vérifier que  $H, \Omega$  et  $G$  sont alignés et qu'en particulier  $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$ .

**Exercice 1994** 1. Calculer les angles :

- entre les vecteurs  $\vec{u}_1(\sqrt{3}, 2)$  et  $\vec{v}_1(1, 3\sqrt{3})$ ,
- entre les vecteurs  $\vec{u}_2(1, \sqrt{2})$  et  $\vec{v}_2(\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} + 2)$ ,
- du triangle de sommets  $A(-1, 0), B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  et  $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

2. Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $D$  :

- $A(1, 1)$  et  $D : 2x + y - 1 = 0$
- $A(2, -1)$  et  $D : 3x - 2y + 4 = 0$
- $A(3, 3)$  et  $D : -x + 3y + 2 = 0$ .

3. Trouver les bissectrices de :

- $D : 5x - 12y + 7 = 0$  et  $D' : 3x + 4y - 7 = 0$ ,
- $D : x - 3y + 5 = 0$  et  $D' : 3x - y - 1 = 0$ .

**Exercice 1995** Soit  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Déterminer l'expression analytique dans ce repère de la réflexion d'axe  $x + y = 1$ .

**Exercice 1996** Soit  $G$  un sous-groupe fini de l'ensemble des isométries du plan. Montrer que  $G$  ne peut pas contenir de translation non triviale.

**Exercice 1997** On considère dans le plan les deux droites  $(D : 3x + y = 5)$  et  $(D' : x - 2y + 3 = 0)$ . Quel est l'angle entre ces deux droites?

**Exercice 1998** Soit  $C$  un cercle de centre  $I = (x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  et  $(D : ax + by + c = 0)$ . En paramétrant  $D$ , montrer que  $D$  est tangente à  $C$  (i.e.  $D \cap C$  est un singleton) ssi  $d(I, D) = R$ .

**Exercice 1999** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $\alpha$  un réel. Déterminer l'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \alpha$ .

**Exercice 2000** Soient  $A, B, C$  les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$ .

**Exercice 2001** Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et  $k$  un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $MA = kMB$ .

**Exercice 2002** Quelle est l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ -4x + 3y - 2 \end{pmatrix} \end{cases} ?$

**Exercice 2003** Soit  $X = \{A, B, C, D\}$  les sommets d'un carré du plan et  $G = \{f \in I_2 / f(X) = X\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $I_2$ . Montrer que si  $f \in G$  alors  $f(O) = O$  où  $O$  est l'isobarycentre de  $A, B, C, D$ . En déduire les éléments de  $G$ .

**Exercice 2004** Déterminer les  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z, z^2, z^4$  soient alignés.

**Exercice 2005** Si  $a$  et  $b$  sont les affixes de deux sommets opposés d'un carré, calculer les affixes des deux autres.

**Exercice 2006** Soit  $O, A, B$  un triangle rectangle en  $O$ . A toute droite  $D$  issue de  $O$  on associe le cercle de diamètre  $A'B'$  où  $A'$  et  $B'$  sont les projetés orthogonaux de  $A$  et  $B$  sur  $D$ . Montrer que tous les cercles passent par un même point fixe (on pourra utiliser une similitude...).

**Exercice 2007** Pour  $a, b, c$  trois nombres complexes tels que  $b \neq c$ , on note  $V(a, b, c) = \frac{c-a}{c-b}$ . Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  quatre nombres complexes distincts. Montrer que les images de ces nombres complexes sont alignées ou cocycliques ssi  $\frac{V(z_1, z_2, z_3)}{V(z_1, z_2, z_4)} \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2008** Soit  $ABCD$  un carré direct et  $M$  un point de la droite  $(DC)$ . La perpendiculaire à  $(AM)$  passant par  $A$  coupe  $(BC)$  en  $N$ . On note  $I$  le milieu de  $[MN]$ . Déterminer le lieu des points  $I$  lorsque  $M$  décrit la droite  $(DC)$ .

**Exercice 2009** Soient  $A, B, C, D$  quatre points distincts du plan tels que  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ . Montrer que le centre de la similitude transformant  $A$  en  $C$  et  $B$  en  $D$  est aussi le centre de celle transformant  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .

## 45.2 Géométrie analytique dans l'espace

**Exercice 2010** Les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner une équation cartésienne du plan qui les contient :

1.  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(-1, -2, -1)$ ,  $C(3, 4, 4)$  et  $D(-2, 3, 1)$ .
2.  $A(0, 1, 3)$ ,  $B(1, 2, -1)$ ,  $C(1, 1, -1)$  et  $D(1, 2, 2)$ .
3.  $A(-1, 2, 4)$ ,  $B(3, -3, 0)$ ,  $C(1, 3, 4)$  et  $D(5, 1, -6)$ .
4.  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(0, -4, 5)$ ,  $C(4, -13, 13)$  et  $D(-4, 5, -3)$ .

**Exercice 2011** 1. Trouver une équation du plan  $(P)$  défini par les éléments suivants.

- (a)  $A, B$  et  $C$  sont des points de  $(P)$ 
  - i.  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 0, 0)$  et  $C(0, 1, 0)$ .
  - ii.  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 0, 1)$  et  $C(-1, 2, 4)$ .
  - iii.  $A(5, 0, -1)$ ,  $B(1, 3, -2)$  et  $C(-2, 4, 5)$ .
- (b)  $A$  est un point de  $(P)$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs directeurs de  $(P)$ 
  - i.  $A(1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}(4, 0, 3)$  et  $\vec{v}(1, 3, -1)$ .
  - ii.  $A(1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}(2, -1, 3)$  et  $\vec{v}(-1, 4, 5)$ .
- (c)  $A$  est un point de  $(P)$ ,  $D$  est une droite contenue dans  $(P)$ 
  - i.  $A(4, 1, -3)$  et  $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$
  - ii.  $A(1, 1, 0)$  et  $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$
- (d)  $D$  et  $D'$  sont des droites contenues dans  $(P)$ 
  - i.  $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$  et  $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$



$$\text{ii. } (D) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \text{ et } (D') : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases}$$

**Exercice 2012** Les plans suivants sont-ils parallèles ou sécants ? Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de la droite  $(D) = (P) \cap (P')$ .

1.  $(P) : 5x - y - 1 = 0$  et  $(P') : z = 3$ .
2.  $(P) : x + y + z + 1 = 0$  et  $(P') : 2x - y + 3z + 2 = 0$ .
3.  $(P) : 2x - z + 1 = 0$  et  $(P') : 4x - 3y + 2z + 5 = 0$ .
4.  $(P) : 4x - 6y + 8z - 1 = 0$  et  $(P') : -6x + 12y - 9z + 11 = 0$ .

**Exercice 2013** Quelle est la nature de l'intersection des trois plans suivants ? Si c'est un point en donner les coordonnées, si c'est une droite en donner un vecteur directeur.

1.  $(P) : z = 1$ ,  $(P') : x - y - 2 = 0$  et  $(P'') : 4x - 2y + z + 2 = 0$ .
2.  $(P) : 4x - 2y + 3z + 5 = 0$ ,  $(P') : 3x + y - z + 2 = 0$  et  $(P'') : x - y + z + 1 = 0$ .
3.  $(P) : 4x - 2y + 10z - 4 = 0$ ,  $(P') : -10x + 5y - 25z + 13 = 0$  et  $(P'') : x + y - z + 1 = 0$ .
4.  $(P) : 3x - y + 2z - 5 = 0$ ,  $(P') : x - y + 3z - 7 = 0$  et  $(P'') : 4x + 2y - z + 1 = 0$ .
5.  $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $(P') : 2x + y + z + 3 = 0$  et  $(P'') : x - 4y + 5z - 6 = 0$ .
6.  $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $(P') : 2x + y - z + 1 = 0$  et  $(P'') : x + 5y - 8z + 2 = 0$ .

**Exercice 2014** Les droites suivantes sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Si elles sont sécantes donner leur point d'intersection et si elles sont parallèles donner un vecteur directeur.

1.  $(D) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$  et  $(D') : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2.  $(D) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$  et  $(D') : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$

**Exercice 2015** Dans chacun des cas suivants dire si la droite  $(D)$  et le plan  $(P)$  sont parallèles ou sécants. Donner alors leur point d'intersection.

1.  $(D) : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$  et  $(P) : 4x - 3y + 7z - 7 = 0$ .
2.  $(D) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$  et  $(P) : -3x + 2y + 3z - 5 = 0$ .

**Exercice 2016** On considère les cinq points suivants :  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(3, 2, 0)$ ,  $C(2, 1, -1)$ ,  $D(1, 0, 4)$  et  $E(-1, 1, 1)$ .

1. Ces quatre points sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer la nature du triangle  $ABC$ .  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont-ils alignés, si non donner une équation cartésienne du plan  $P$  qui les contient.
3. Déterminer les coordonnées du barycentre  $G$  des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
4. Montrer que  $O$ ,  $D$  et  $G$  sont alignés et que la droite  $OD$  est perpendiculaire à  $P$ .

**Exercice 2017** Soient  $D_1, D_2$  et  $D_3$  trois droites concourantes en  $\Omega$  et soient  $P, P'$  et  $P''$  trois plans tels que aucun ne contient aucune des 3 droites ci dessus. On peut alors définir les 9 points d'intersections :  $P$  coupe  $D_1, D_2, D_3$  en  $A, B, C$  ;  $P'$  coupe  $D_1, D_2, D_3$  en  $A', B', C'$  ;  $P''$  coupe  $D_1, D_2, D_3$  en  $A'', B'', C''$  ;

On considère aussi les intersections suivantes :  $I = (AB') \cap (A'B)$  ,  $J = (AC') \cap (A'C)$  ,  $K = (BC') \cap (B'C)$ .

Montrer que les droites  $(A''K), B''J$  et  $(C''I)$  sont parallèles ou concourantes. (*Indication : utiliser un bon repère affine*).

**Exercice 2018** On considère les quatre points suivants :  $A(2, 0, 0), B(-1, \sqrt{3}, 0), C(-1, -\sqrt{3}, 0), D(0, 0, 4)$ . Déterminer un vecteur directeur de la droite  $(ABC) \cap (ADE)$ .

**Exercice 2019** Donner une condition sur  $m$  pour que les trois plans suivants se coupent sur une même droite.  $(P) : x + my - z + 1 = 0$ ,  $(P') : (m + 1)x + 3y + 4z - 2 = 0$  et  $(P'') : y + (2m + 4)z - (2m + 2) = 0$ .

**Exercice 2020** On considère la famille de plans  $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$  définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x + (2m - 1)y + mz = 3$$

1. Déterminer les plans  $P_m$  dans chacun des cas suivants :

- $A(1, 1, 1) \in P_m$
- $B(-1, -2, 6) \in P_m$
- $C(-1, 0, 1) \in P_m$
- $\vec{v}(1, 1, 1)$  est un vecteur directeur de  $P$
- $\vec{n}(0, 1, 0)$  est normal à  $P$ .

2. Montrer qu'il existe un unique point  $R$  appartenant à tous les plans  $P_m$ .

**Exercice 2021** 1. Déterminer la distance du point  $A$  au plan  $(P)$

- $A(1, 1, 1)$  et  $(P) : x + y + z - 1 = 0$
- $A(1, 0, 2)$  et  $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$ .
- $A(3, 2, 1)$  et  $(P) : -x + 5y - 4z + 2 = 0$ .
- $A(4, 5, 2)$  et  $(P) : 2x - y + z = 0$ .

2. Calculer la distance du point  $A(1, 1, 1)$  à la droite  $(D) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$

**Exercice 2022** On considère les deux droites  $(D) : \begin{cases} y - z = 3 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$  et  $(\Delta) : \begin{cases} -x + 3z = 1 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}$ .

- Donner un vecteur directeur de  $D$  et de  $\Delta$ .
- Donner une équation paramétrique de  $\Delta$ .
- On fixe un point  $M_\alpha$  de  $\Delta$  dépendant du paramètre  $\alpha$  où  $\alpha$  est l'abscisse de point  $M_\alpha$ . Donner une équation du plan  $P_\alpha$  passant par  $M_\alpha$  et contenant  $D$ .
- Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui est perpendiculaire à  $\Delta$  ? Pour quelle valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  est il obtenu ? Donner une équation de ce plan. Donner les coordonnées de  $M_{\alpha_0}$ .

**Exercice 2023** On se donne 2 droites  $D_1$  et  $D_2$  ayant comme vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .

- Perpendiculaire commune à ces deux droites.

- (a) On suppose que  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont pas colinéaires et on note  $\vec{n} := \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ .
- Montrer que le plan  $P_1$  contenant  $D_1$  et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur directeur et le plan  $P_2$  contenant  $D_2$  et admettant  $\vec{n}$  comme vecteur directeur se coupent en une droite  $\Delta$ .
  - Montrer que  $\Delta$  est une perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$  (c'est à dire  $\Delta$  coupe  $D_1$  et  $D_2$ , et est orthogonale à  $D_1$  et à  $D_2$ ).
  - Montrer que  $\Delta$  est la seule perpendiculaire commune à  $D_1$  et  $D_2$ .
- (b) Comment construire  $\Delta$  dans le cas où  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles ?

2. Distance entre ces deux droites.

Soit  $H_1 := D_1 \cap \Delta$  et  $H_2 := D_2 \cap \Delta$ .

Montrer que pour tout  $A_1 \in D_1$  et tout  $A_2 \in D_2$ , on a  $d(A_1, A_2) \geq d(H_1, H_2)$ .

$d(H_1, H_2)$  est appelée *distance entre les deux droites*  $D_1$  et  $D_2$ .

3. Donner des équations cartésiennes pour  $\Delta$  et calculer la distance entre les deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dans le cas suivant :

$$(a) (D_1) : \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} -x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(b) (D_1) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$(c) (D_1) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$$

$$(d) (D_1) : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D_2) : \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2024** 1. Déterminer les plans bissecteurs de :

$$P : x + y + z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad P' : 2x + y + 2z = 1$$

$$Q : 5x + 3y - 4z = 8 \quad \text{et} \quad Q' : 4x - 5y - 3z = 2.$$

2. Déterminer l'ensemble des points de l'espace équidistants des trois axes de coordonnées.

3. On considère la droite  $D$  d'équation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

Donner une équation des deux plans  $P$  et  $P'$  contenant  $D$  à une distance de 1 de l'origine (point  $O$  de coordonnées  $(0, 0, 0)$ ).

**Exercice 2025** Déterminer l'expression analytique de la réflexion  $s$  de plan  $x + y - z = 1$ . Quelle est l'image par  $s$  du plan  $x + 2y - 3z + 1 = 0$  ?

**Exercice 2026** Déterminer la distance du point  $M = (1, 2, 3)$  aux droites

$$D \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

**Exercice 2027** Soit deux plans 
$$\begin{cases} \pi : ux + vy + wz + h = 0 \\ \pi' : u'x + v'y + w'z + h' = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que si  $\pi$  et  $\pi'$  sont sécants, tout plan passant par leur droite d'intersection  $D$  a une équation du type

$$\lambda(ux + vy + wz + h) + \mu(u'x + v'y + w'z + h') = 0$$

et réciproquement, tout plan ayant une équation de ce type, (pour un couple  $(\lambda, \mu)$  donné) passe par  $D$ .

2. Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont parallèles, que représente l'ensemble des plans d'équation :

$$\lambda(ux + vy + wz + h) + \mu(u'x + v'y + w'z + h') = 0$$

**Exercice 2028** Écrire l'équation du plan passant par la droite  $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$  et parallèle à la droite  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$ .

**Exercice 2029** Soit la droite d'équations  $\begin{cases} 3x - 2y - z + 4 = 0 \\ x - 4y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ . Trouver sa projection sur le plan  $5x + 2y + 2z - 7 = 0$ .

**Exercice 2030** Soit les droites  $D$  et  $D'$  non coplanaires :

$$(D) \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Trouver des équations de leur perpendiculaire commune.

### 45.3 Changements de repères, applications affines, isométries

**Exercice 2031** On considère les 4 points  $A, B, C, D$  donnés.  $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  définit-il bien un nouveau repère ? Dans ce cas, trouver les formules de changements de repère exprimant les coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en fonction de celles  $(x', y', z')$  dans  $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ .

1.  $A(2, -1, 0), B(7, -1, -1), C(-3, 0, -2), D(3, -6, -3)$
2.  $A(4, 1, 4), B(7, 3, 1), C(9, 0, 0), D(5, 2, 3)$
3.  $A(0, -1, 3), B(5, -6, 4), C(-4, 1, -2), D(-3, 3, 6)$
4.  $A(1, 1, 0), B(1, 5, 2), C(0, -1, 1), D(3, 4, -1)$
5.  $A(2, -1, 4), B(0, 0, 1), C(3, 2, -1), D(1, 3, 4)$
6.  $A(4, 4, 2), B(5, 3, 2), C(4, 3, 3), D(3, 5, 2)$
7.  $A(1, 3, 1), B(1, 2, 2), C(2, -1, -4), D(0, 8, 6)$ .

**Exercice 2032** Les formules suivantes définissent-elles bien un changement de repère ? Dans ce cas, donner le changement de repère inverse.

1.  $\begin{cases} x' = y - z + 1 \\ y' = -x - 4y + 5z + 2 \\ z' = x - 5y + 5z + 1 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 3z - 2 \\ y' = 2x + 3y + z + 2 \\ z' = 4x - y + 3z + 2 \end{cases}$

$$3. \begin{cases} x' = -2x - 4y + 2z - 2 \\ y' = x + y - 5z + 1 \\ z' = -3x - 4y + 4z - 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x' = 3x - 5y + z + 2 \\ y' = 2x - y + z - 1 \\ z' = -3x - 4y - z - 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 2x - z + 1 \\ y' = -2x + 2y + 2z - 2 \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = x - 2y - 3z + 5 \\ y' = -3x + 4y + z - 2 \\ z' = 2x - y + 6z + 3 \end{cases}$$

**Exercice 2033** On considère les droites et les plans suivants dont les équations sont données dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Donner leurs équations dans le nouveau repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ , sachant que dans  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les points  $A, B, C$  et  $D$  ont pour coordonnées respectives  $A(4, -1, 2)$ ,  $B(2, -5, 4)$ ,  $C(5, 0, -3)$ ,  $D(1, -5, 6)$ .

1.  $P : x + y = 1$

2.  $P : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$

3.  $P : x - y + z + 3 = 0$

$$4. P : \begin{cases} x = 2t + 3s + 1 \\ y = t - s + 2 \\ z = 4t - 2s - 3 \end{cases}$$

$$5. (D) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$6. (D) : \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ 4x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

**Exercice 2034** On considère la droite  $(D) : \begin{cases} y - z = 3 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$ .

1. On considère le point  $A(-2, 4, 1)$ , les vecteurs  $\vec{u}(1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}(2, 2, -4)$ ,  $\vec{w}(3, -1, 1)$  et le repère  $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . On note  $x', y'$  et  $z'$  les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant  $x, y, z$  en fonction de  $x', y', z'$ .

2. Utiliser ce changement de repère pour donner dans le repère  $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une équation de  $D$ .

3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

**Exercice 2035 (Transformations affines et Isométries)** Soit  $P$  un plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  quelconque.

1. On considère  $D$  une droite d'équation cartésienne  $2x - y + 3 = 0$  et  $\vec{u}(3, -2)$ .

(a) Soit  $A(4, 2)$ . Donner une équation paramétrique de  $D_A$  droite passant par  $A$  de direction  $\vec{u}$ . En déduire les coordonnées de  $A' = D_A \cap D$  projeté de  $A$  sur  $D$  selon  $\vec{u}$ .

(b) Définir plus généralement analytiquement la projection sur  $D$  selon  $\vec{u}$  en exprimant les coordonnées  $x', y'$  de  $M'$  projeté de  $M(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

2. Définir analytiquement les projections sur  $D$  selon  $\Delta$  dans les cas suivants :

- (a)  $\Delta$  d'équation  $x - 2y + 1 = 0$ .
- (b)  $\Delta$  d'équation  $3x + 2y + 2 = 0$ .
- (c)  $\Delta$  d'équation  $x + y - 1 = 0$ .
- (d)  $\Delta$  d'équation  $2x - 2y + 4 = 0$ .

**Exercice 2036** Soit  $P$  un plan muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  quelconque.

1. Donner l'expression analytique de la translation  $t_1$  de vecteur  $(1, 2)$ .
2. Donner l'expression analytique de la translation  $t_2$  de vecteur  $(-1, 2)$ .
3. Donner l'expression analytique de l'homothétie  $h_1$  de centre l'origine du repère et de rapport 2 et de l'homothétie  $h_2$  de centre  $A(2, -1)$  de rapport 3.
4. Donner l'expression analytique de  $t_1 \circ h_1$ ,  $t_2 \circ h_2$ ,  $h_1 \circ t_1$ ,  $h_2 \circ t_2$ .
5. Soit  $M(x, y)$  un point de  $P$ . Donner les coordonnées du symétrique de  $M$  par rapport à la droite d'équation  $y = ax + b$ .

**Exercice 2037** 1. On considère  $S_1$  la transformation du plan définie par le système d'équations suivant :

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1, \quad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2. \text{ Reconnaitre cette transformation.}$$

2. De même avec la transformation  $S_2$  définie par  $x' = 5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ ,  $y' = -5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$ .
3. On compose  $S_1$  avec  $S_2$ . Donner l'expression de  $S_1 \circ S_2$ , et trouver la nature de cette transformation.

**Exercice 2038** 1. Soit  $f$  la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y - 2z + 4 \\ y' = -8x + 5y - 4z + 8 \\ z' = -4x + 2y - z + 4 \end{cases}$$

- (a) Déterminer l'ensemble  $P$  des points invariants par  $f$ .
- (b) Montrer que pour  $M$  d'image  $M'$ , le milieu de  $[MM']$  est dans  $P$ ,  $(MM')$  est parallèle à une direction fixe.
- (c) En déduire une description simple de  $f$ .

2. Soit  $f$  la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z + 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z + 1) \end{cases}$$

- (a) Déterminer l'ensemble  $P$  des points invariants par  $f$ .
- (b) Montrer que pour  $M$  d'image  $M'$  le vecteur  $\vec{MM'}$  est colinéaire à un vecteur fixe.
- (c) En déduire une description simple de  $f$ .

**Exercice 2039** 1. Définir analytiquement les projections orthogonales suivantes :

- (a) sur le plan d'équation  $2x + 2y - z = 1$ .
- (b) sur le plan d'équation  $2x - 3y + z = 6$ .
- (c) sur la droite d'équation  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$ .

2. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan ( $P$ ) contenant le point  $C(2, -1, 1)$  et ayant pour vecteurs directeurs  $\vec{u}(0, -1, 1)$  et  $\vec{u}'(-2, 0, 1)$ , selon la droite  $AB$ , où  $A(1, -1, 0)$  et  $B(0, -1, 3)$ .

**Exercice 2040** Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{O}I, \vec{O}J)$ .

1. Soit  $f$  la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y + 2) \end{cases}$$

- Calculer les coordonnées de  $O', I', J'$  les images par  $f$  des points  $O, I, J$ .
  - Montrer que le repère  $(O', \vec{O}'I', \vec{O}'J')$  est orthonormé, est-il direct ?
  - En déduire que  $f$  est une isométrie, est-elle directe ?
  - Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$  et reconnaître  $f$ .
  - Donner l'expression analytique de la transformation inverse de  $f$ .
  - Calculer l'image par  $f$  la droite d'équation  $2x - y - 1 = 0$ .
2. Donner l'expression analytique de la rotation de centre  $A(1, 1)$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , calculer l'image de  $0$  par cette transformation.
3. Même question pour la symétrie d'axe la droite d'équation  $x + y + 1 = 0$
4. Donner l'expression analytique de la composée des deux applications précédentes.

**Exercice 2041** Dans le plan cartésien identifié à  $\mathbb{C}$ , un point  $M$  est représenté par son affixe  $z$ .

- Dessiner les ensembles suivants puis les exprimer en fonction de  $(x, y)$  ( $(z = x + iy)$ ) :
  - $z + \bar{z} = 1$
  - $z - \bar{z} = i$
  - $iz - i\bar{z} = 1$
- Donner l'expression analytique en complexe des transformations suivantes, puis calculer l'image de  $i$  par ces transformations :
  - la rotation de centre  $1 + i$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ,
  - la symétrie d'axe la droite d'équation  $iz - i\bar{z} = 1$ ,
  - la composée des deux applications précédentes.
- Soit  $f$  la transformation du plan définie analytiquement par  $z' = (1 + i)z + 1$ .
  - Déterminer l'ensemble des points invariants par  $f$ .
  - Donner l'expression analytique de la transformation inverse de  $f$ .
  - Calculer l'image par  $f$  de l'ensemble  $z + \bar{z} = 1$ .
  - Ecrire  $f$  comme la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

**Exercice 2042** Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On considère les deux droites  $d$  et  $D$  données par les systèmes d'équations cartésiennes suivant :

$$d \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Donner un point et un vecteur directeur de  $d$ . Donner un point et un vecteur directeur de  $D$ .

- ii. Dire si les droites  $d$  et  $D$  sont parallèles, sécantes ou non coplanaires.
- iii. Justifier l'existence de deux plans parallèles (en donnant pour chacun de ces deux plans un point et deux vecteurs directeurs) tels que  $d$  est contenue dans l'un et  $D$  est contenue dans l'autre.
- (b) i. Soient  $\vec{u}$  le vecteur de coordonnées  $(4, -1, 1)$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}$  le vecteur de coordonnées  $(0, 1, 1)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\Omega$  le point de coordonnées  $(1, 1, 0)$  dans  $\mathcal{R}$ .  
Déterminer une équation cartésienne pour le plan  $P$  de repère cartésien  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , en déduire une équation cartésienne pour le plan  $Q$  de repère cartésien  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ .
- ii. Donner des équations paramétriques pour la droite  $\Delta$  normale à  $P$  passant par  $O$ . Déterminer les deux points  $\Delta \cap P$  et  $\Delta \cap Q$  puis calculer la distance entre eux.

Interpréter cette distance.

2. On considère les vecteurs de l'espace  $\vec{a} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $\vec{b} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $\vec{c} = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .
- (a) Montrer que  $(0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  est un repère orthonormé. Est-il direct ?
- (b) Ecrire les formules de changement de repères de  $\mathcal{R}$  à  $(0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .
- (c) Quelle est l'équation dans le repère  $(0, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  du plan d'équation  $x + 2y - 2z = 0$  dans  $\mathcal{R}$ ? Même question avec le plan d'équation  $x + 2y - 2z = 3$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Exercice 2043** Tout ce problème se situe dans l'espace euclidien tridimensionnel muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On définit les trois points :  $A = (3, \sqrt{6}, 3)$ ,  $B = (3, -\sqrt{6}, 3)$  et  $C = (4, 0, 0)$ .

1. (a) Montrer que les points  $O, A$  et  $B$  ne sont pas alignés et donner une équation cartésienne du plan  $P$  contenant  $O, A$  et  $B$ .
- (b) Calculer les distances  $OA, OB$  et  $AB$ . En déduire la nature du triangle  $OAB$ .
- (c) Les points  $O, A, B$  et  $C$  sont-ils coplanaires ?
2. Soit  $G$  le barycentre des points  $O, A, B$  et  $C$ , c'est à dire, par définition l'unique point  $G$  de l'espace tel que :  $\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .
- (a) Montrer que  $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ .
- (b) En déduire les coordonnées de  $G$  dans  $\mathcal{R}$ .
3. (a) Montrer que la droite  $(GC)$  est perpendiculaire au plan  $P$ .
- (b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $(GC)$  avec le plan  $P$ .
4. Montrer que la transformation de l'espace définie par les formules :  $(x' = x, y' = -y, z' = z)$  est une isométrie. Quels sont ses points fixes ? Déterminer les images des points  $O, A, B, C$  par cette isométrie. Que remarque-t-on ?

**Exercice 2044** L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On définit les points

$$A : (1, 2, 3) ; \quad B : (2, 3, 1) ; \quad C : (3, 1, 2) ; \quad D : (1, 1, 1)$$

et le plan

$$\Pi : 2x - 3y + 4z = 0.$$

1. Montrer que les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés.
2. Montrer que les points  $A, B, C, D$  ne sont pas coplanaires.
3. Donner une équation cartésienne du plan  $P$  passant par  $A, B, C$ .



4. Calculer la distance de  $D$  au plan  $P$ .
5. Donner une représentation paramétrique de la droite  $d = P \cap \Pi$ .

**Exercice 2045** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points distincts et non alignés de l'espace affine tridimensionnel  $\mathcal{E}$ . On note  $P$  le plan qui contient  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Soit  $O$  un point de  $\mathcal{E}$  n'appartenant pas à  $P$ .

1. (a) Expliquer rapidement pourquoi  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  est un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ .  
 (b) Dans ce repère  $\mathcal{R}$ , écrire les coordonnées des points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , et déterminer une équation cartésienne du plan  $P$ .
2. Soit  $A'$  le point de la droite  $(OA)$  tel que  $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ . On note  $P'$  le plan parallèle à  $P$  passant par  $A'$ .  $P'$  coupe  $(OB)$  en  $B'$  et  $(OC)$  en  $C'$ .  
 Dans  $\mathcal{R}$ , écrire les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  et déterminer des équations paramétriques pour les droites  $(BC')$  et  $(B'C)$ , en déduire des équations cartésiennes de ces droites.  
 Calculer les coordonnées des points  $I = (BC') \cap (B'C)$ ,  $J = (AC') \cap (A'C)$  et  $K = (AB') \cap (A'B)$ .
3. Soit  $A''$  le point de la droite  $(OA)$  tel que  $\overrightarrow{OA''} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ . On note  $P''$  le plan parallèle à  $P$  passant par  $A''$ .  $P''$  coupe  $(OB)$  en  $B''$  et  $(OC)$  en  $C''$ .  
 Montrer que les droites  $(IA'')$ ,  $(JB'')$ ,  $(KC'')$  sont parallèles.

## 46 Courbes paramétrées

### 46.1 Coordonnées cartésiennes

**Exercice 2046** Tracer les courbes paramétrées suivantes

$$x(t) = \cos^2(t) \quad y(t) = \cos^3(t) \sin(t)$$

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4} \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \quad y(t) = t + \frac{1}{t}$$

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x(t) = \tan(t) + \sin(t) \quad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$x(t) = \sin(2t) \quad y(t) = \sin(3t)$$

**Exercice 2047** On fait rouler sans glissement un cercle de rayon 1 sur l'axe  $(Ox)$ . Déterminer et tracer la courbe décrite par un point du cercle.

**Exercice 2048** Tracer la courbe d'équation  $x^3 + y^3 = 3xy$  en la coupant par les droites  $y = tx$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2049** Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos(2u) \sin(u) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(2u) \cos(u) du.$$

**Exercice 2050** Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = t^2 + 2t, y(t) = \frac{1+2t}{t^2}.$$

## 46.2 Coordonnées polaires

**Exercice 2051** Tracer les courbes en polaires suivantes

$$\rho(\theta) = \sin(2\theta)$$

$$\rho(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$$

$$\rho(\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$

$$\rho(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$$

**Exercice 2052** Soit  $C$  un cercle du plan de centre  $(1, 0)$  et de rayon  $a$ . Déterminer et tracer le lieu des projetés orthogonaux de  $O$  sur les tangentes de  $C$ .

**Exercice 2053** Déterminer et tracer les courbes dont la tangente en tout point  $M$  fait un angle de  $\frac{\pi}{4}$  avec  $\overrightarrow{OM}$ .

**Exercice 2054** Grâce aux coordonnées polaires, tracer la courbe définie implicitement par la relation  $2xy(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ .

**Exercice 2055** Tracer la courbe d'équation polaire :

$$r = 1 + \cos \theta.$$

**Exercice 2056** Tracer les courbes d'équations polaires :

$$r = \frac{\tan \theta}{\cos \theta} ; r^2 = \frac{1}{\sin(2\theta)}.$$

## 46.3 Divers

**Exercice 2057** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  de classe  $C^1$ , montrer que  $f$  ne peut être bijective.

**Exercice 2058** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue, et  $z \in \mathbb{C}$  quelconque. Montrer :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma' \in C([0, 1], \mathbb{C}) \text{ tel que :} \\ 1 & : \forall t \in [0, 1], |\gamma(t) - \gamma'(t)| < \varepsilon, \\ 2 & : \forall t \in [0, 1], \gamma(t) \neq z. \end{aligned}$$

## 47 Propriétés métriques des courbes planes

**Exercice 2059** Déterminer la longueur de la courbe  $y = \sqrt{x}(1 - \frac{x}{3})$  pour  $0 \leq x \leq 3$ .

**Exercice 2060** Déterminer une abscisse curviligne, la longueur et la développée de l'astroïde.

**Exercice 2061** Calculer le rayon de courbure de  $\rho(\theta) = \cos(\frac{\theta}{3})$  en fonction de  $\rho$ .

**Exercice 2062** Soit  $\mathcal{P}$  la parabole  $y^2 = x$ . Déterminer une équation paramétrée et une équation cartésienne de  $\Gamma$  la développée de  $\mathcal{P}$ . Tracer  $\Gamma$ .

**Exercice 2063** Soit  $\Gamma$  la courbe  $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$ .

1. Tracer cette courbe.
2. Calculer le rayon de courbure.
3. Soient  $I$  le centre de courbure en  $M$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(OM)$ . Déterminer  $\overrightarrow{MH}$ .
4. En déduire une construction géométrique de la développée de  $\Gamma$ .

**Exercice 2064** Soit  $M(s)$  un arc  $C^2$  birégulier paramétré par une abscisse curviligne. Soit  $\mathcal{R}$  le repère de Frénet  $(M(0), \vec{t}(0), \vec{n}(0))$ . On note  $(X(s), Y(s))$  les coordonnées dans ce repère d'un point  $M(s)$  de la courbe.

1. Montrer que si  $R_0$  est le rayon de courbure en  $M(0)$  alors  $R_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{X^2(s)}{2Y(s)}$ .
2. En déduire le rayon de courbure au point  $\theta = 0$  de la courbe  $\rho(\theta) = 1 + 2 \cos(\frac{\theta}{2})$ .

## 48 Coniques

**Exercice 2065** Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ ,  $M$  un point fixé de  $\mathcal{E}$  et  $M'$  un point qui se promène sur  $\mathcal{E}$ . Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  les cercles de centres  $M$  et  $M'$  de rayons  $MF'$  et  $M'F'$ . Soient  $I$  le point de  $(FM) \cap \mathcal{C}$  tel que  $M \in [FI]$  et  $J$  le deuxième point d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

1. Montrer que  $(MM')$  est bissectrice de l'angle  $F'MJ$ .
2. Que devient  $J$  si  $M'$  tend vers  $M$  (on ne demande pas de preuve) ?
3. Montrer que la tangente à  $\mathcal{E}$  en  $M$  est bissectrice extérieure de l'angle  $FMF'$ .

**Exercice 2066** Soit  $\mathcal{P}$  une parabole de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$ ,  $M$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $H$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$ . Montrer que la tangente à  $\mathcal{P}$  en  $M$  est la médiatrice de  $[FH]$ . En déduire un procédé de construction d'une parabole.

**Exercice 2067** Déterminer l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à une parabole.

**Exercice 2068** Soit  $\mathcal{E} = \{M(z)/2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1\}$ ,  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et  $\mathcal{E}' = R(\mathcal{E})$ . Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{E}'$  et en déduire le tracé de  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 2069** Tracer les courbes suivantes :

1.  $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
2.  $xy + 3x + 5y - 4 = 0$
3.  $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

**Exercice 2070** Déterminer astucieusement le sommet et l'axe de la parabole  $x(t) = t^2 + t + 1$  et  $y(t) = t^2 - 2t + 2$ .

**Exercice 2071** Montrer que la courbe paramétrée  $x(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1}$  et  $y(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1}$  est une ellipse et la tracer.

## 49 Analyse vectorielle

**Exercice 2072** On considère le champ de vecteurs  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$P(x, y) = (2xe^{x^2-2y}; -2e^{x^2-2y}).$$

1. Vérifier que la forme différentielle associée à  $P$  est fermée.
2. En déduire que  $P$  est un champ de gradients et en déterminer un potentiel.
3. Calculer la circulation de  $P$  le long du chemin

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t); e^t + 1).$$

**Exercice 2073** Soient  $a, b$  des nombres tels que  $0 < a < b$  et soit

$$D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \leq xy \leq b, y \geq x, y^2 - x^2 \leq 1\}.$$

En effectuant le changement de variable  $u = xy, v = y^2 - x^2$ , calculer

$$I = \iint_D (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) dx dy.$$

**Exercice 2074** Soit le champ de vecteurs  $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2xy + e^y, x^2 + xe^y) \end{cases}$ . Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long de la parabole  $x = y^2$  entre les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

**Exercice 2075** Soit le champ de vecteurs  $\vec{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (xy, -z, xz) \end{cases}$ .  $\vec{V}$  est-il un champ de gradient? Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long de l'hélice  $x = \cos t, y = \sin t, z = t$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Exercice 2076** Montrer que  $\omega(x, y) = \frac{(1 - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx + \frac{(1 + x^2 - y^2)x}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy$  est une forme différentielle exacte sur  $\mathbb{R}^2$  et l'intégrer.

**Exercice 2077** Sur  $D = ]0, +\infty[^2$  on définit  $\omega(x, y) = \left(\frac{x}{x+y} + \ln(x^2 + xy)\right) dx + \frac{\varphi(y)}{x+y} dy$ .

1. Trouver une CNS sur  $\varphi$  pour que  $\omega$  soit fermée.
2. Montrer qu'alors  $\omega$  est exacte et l'intégrer.

**Exercice 2078** Soit  $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  une forme différentielle  $C^1$  sur un ouvert étoilé  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ .

1. A quelle condition  $\omega$  est-elle exacte?
2. On suppose qu'elle n'est pas exacte et on cherche alors  $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^*$  de classe  $C^1$  telle que  $\lambda\omega$  soit exacte. On dit alors que  $\lambda$  est un facteur intégrant. En éliminant  $\lambda$  dans la condition trouvée à la question précédente, trouver une condition nécessaire sur  $P, Q, R$  pour qu'il existe un facteur intégrant.

**Exercice 2079** Soit  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$  et  $\omega(x, y, z) = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$ .

1. En utilisant l'exercice précédent (exercice 2078), montrer que  $\omega$  admet un facteur intégrant.
2. Chercher un facteur intégrant ne dépendant que de  $z$ .
3. On suppose qu'un mouvement dans  $U$  vérifie l'équation différentielle  $2x(t)z(t)\dot{x}(t) - 2y(t)z(t)\dot{y}(t) - (x^2(t) - y^2(t))\dot{z}(t)$ . Trouver une intégrale première du mouvement.

**Exercice 2080** Calculer l'aire d'une astroïde.

## Huitième partie

# QCM et FORMULAIRES

## QCM de révisions

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

### Logique

**Question 1** Soit l'équation  $E : x^n = 27$ .

1.   $E$  a une unique solution réelle quel que soit  $n \geq 1$ .
2.   $E$  a au moins une solution réelle quel que soit  $n \geq 1$ .
3.   $E$  a  $n$  solutions réelles quel que soit  $n \geq 1$ .
4.   $E$  a au moins  $n$  solutions complexes quel que soit  $n \geq 1$ .
5.   $E$  a exactement  $n$  solutions complexes quel que soit  $n \geq 1$ .

**Question 2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ .

1.   $f$  est injective.
2.   $f$  n'est pas injective.
3.   $f$  est surjective.
4.   $f$  n'est pas surjective.
5.  La restriction de  $f, f|_{[1,2]} : [1,2] \rightarrow [2,5]$  est bijective.

**Question 3** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + 1$ .

1.   $f$  est injective.
2.   $f$  n'est pas injective.
3.   $f$  est surjective.
4.   $f$  n'est pas surjective.
5.  La restriction de  $f, f|_{[1,2]} : [1,2] \rightarrow [2,5]$  est bijective.

**Question 4** Pour  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $z = x + iy$ , on pose  $e^z = e^x \times e^{iy} = e^{x+iy}$ .

1.   $|e^z| = e^x$ .
2.   $|e^z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
3.   $\text{Arg } e^z = y$ .
4.   $\text{Arg } e^z = x + y$ .
5.  La fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z$  est injective.

**Question 5** Par quoi doit on compléter les pointillés pour que les **deux** assertions suivantes soient vraies :

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \bar{z} \dots \dots z \in \mathbb{R} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad z^3 = -1 \dots \dots z = -1$$

1.   $\Rightarrow$  et  $\Leftarrow$ .
2.   $\Leftrightarrow$  et  $\Leftrightarrow$ .

3.  $\square \Leftarrow et \Leftrightarrow$ .

4.  $\square \Rightarrow et \Rightarrow$ .

5.  $\square \Leftrightarrow et \Leftarrow$ .

**Question 6** Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

1.  $\square \exists N > 0 \forall n (n \geq N \Rightarrow x_n \geq 0)$ .

2.  $\square \exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* x_n \leq \varepsilon$ .

3.  $\square \forall N \in \mathbb{N}^* \exists n \geq N / x_n < 0$ .

4.  $\square \exists n \in \mathbb{N}^* x_n = 0$ .

5.  $\square \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^* (n \geq N \Rightarrow |x_n| \leq \varepsilon)$ .

**Question 7** Soit  $E$  un ensemble,  $A, B \subset E$ , soit  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Les assertions suivantes sont elles vraies quels que soient  $A$  et  $B$  inclus dans  $E$  ?

1.  $\square A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

2.  $\square A \Delta B = \complement A \cap \complement B$ .

3.  $\square$  Si  $B \subset A$  alors  $A \Delta B = A$ .

4.  $\square$  Si  $E$  est un ensemble fini,  $\text{Card}(A \Delta B) \leq \text{Card} A + \text{Card} B$ .

5.  $\square$  Si  $E$  est un ensemble fini,  $\text{Card}(A \Delta B) < \text{Card} A + \text{Card} B$ .

**Question 8** Soit la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 = 1$  puis pour  $n \geq 1$   $x_n = \frac{x_{n-1}}{n}$ .

1.  $\square \forall n \in \mathbb{N} x_n > 0$ .

2.  $\square \forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} \leq x_n$ .

3.  $\square \exists N \in \mathbb{N} \exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow x_n = c)$ .

4.  $\square \forall n \in \mathbb{N} x_n \geq \frac{1}{2n!}$ .

5.  $\square \forall n \in \mathbb{N} x_n \leq \frac{1}{2n!}$ .

**Question 9** On lance de façon aléatoire deux dés identiques à 6 faces (numérotées de 1 à 6). On ne tient pas compte de l'ordre, par exemple le tirage 1 puis 5 est le même que 5 puis 1, mais les tirages 3 puis 3, et 3 puis 4 sont distincts.

1.  $\square$  Il y a 36 tirages distincts possibles.

2.  $\square$  Il y a 30 tirages distincts possibles.

3.  $\square$  Il y a 21 tirages distincts possibles.

4.  $\square$  La somme des deux chiffres a plus de chances d'être 7 que 2.

5.  $\square$  La somme des deux chiffres a strictement plus de chances d'être  $\geq 11$  que  $\leq 3$ .

**Question 10** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , soit  $A \subset E$  un ensemble à  $p$  éléments, et  $B \subset E$  un ensemble à  $q$  éléments. On note  $\mathcal{S} = \{(a, b) \in A \times B / a \neq b\}$  et  $\mathcal{T} = \{(I, b) \text{ avec } I \subset A; \text{Card} I = r; b \in B\}$ .

1.  $\square$  Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\text{Card} \mathcal{S} = p + q$ .

2.  $\square$  Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\text{Card} \mathcal{S} = pq$ .

3.  $\square$  Si  $A \subset B$  alors  $\mathcal{S} = \emptyset$ .

4.  $\square \text{Card} \mathcal{T} = C_n^p \times r$ .

5.  $\square \text{Card} \mathcal{T} = C_p^r \times q$ .

## Arithmétique

**Question 11** Les propositions suivantes sont-elles vraies quels que soient  $l \geq 2$  et  $p_1, \dots, p_l$  des nombres premiers  $> 2$ .

1.   $p_1 p_2 \dots p_l$  est un nombre premier.
2.  le carré de  $p_1$  est un nombre premier.
3.   $p_1 p_2 \dots p_l + 1$  est un nombre premier.
4.   $\prod_{i=1}^l p_i$  est un nombre impair.
5.   $\sum_{i=1}^l p_i$  est un nombre impair.

**Question 12**

1.  Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier, alors  $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$  est divisible par 24.
2.  Soit  $n \geq 4$  un entier pair alors  $\frac{n}{2}$  est impair.
3.  La somme et le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.
4.   $a|b$  et  $a'|b' \Rightarrow aa'|bb'$ .
5.   $a|b$  et  $a'|b' \Rightarrow a+a'|b+b'$ .

**Question 13**

1.  Le pgcd de 924, 441 et 504 est 21.
2.  627 et 308 sont premiers entre eux.
3.  Si  $p \geq 3$  est premier, alors  $p!$  est premier.
4.  Soit  $n \geq 2$  alors  $n$  et  $n+1$  sont premiers entre eux.
5.  Soit  $n \geq 2$  un entier, le pgcd de  $\{n^i \text{ pour } i = 1, \dots, 100\}$  est  $n$ .

**Question 14**

1.   $ab = \text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b)$ .
2.   $abc = \text{pgcd}(a, b, c) \times \text{ppcm}(a, b, c)$ .
3.   $\text{ppcm}(a, b, c)$  est divisible par  $c$ .
4.   $\text{ppcm}(1932, 345) = 19320$ .
5.   $\text{ppcm}(5, 10, 15) = 15$ .

**Question 15**

1.  Si  $a|bc$  et  $a$  ne divise pas  $b$  alors  $a|c$ .
2.  Sachant que 7 divise  $86419746 \times 111$  alors 7 divise 86419746.
3.  Si  $a = bq + r$  est la division euclidienne de  $a$  par  $b$  alors  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$ .
4.  Il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $195u + 2380v = 5$ .
5.  Sachant qu'il existe  $u, v$  tels que  $2431u + 65520v = 39$  alors  $\text{pgcd}(2431, 65520) = 39$ .

**Question 16**

1.   $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$ .
2.   $\forall P \in \mathbb{Z}[X] \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$ .
3.   $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \quad x \in \mathbb{Q} \Rightarrow P(x) \in \mathbb{Q}$ .
4.   $\forall P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $\geq 1 \quad \exists z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0$ .
5.  Tout polynôme de degré 2 est positif.

**Question 17** Soit  $P, Q \in \mathbb{C}[X]$  des polynômes non nuls  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , soit  $I_P = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$ , soit  $\text{val}(P) = \min I_P$ .

1.   $\text{val}(-X^7 + X^3 + 7X^2) = 2$ .
2.   $\text{val}(P + Q) \geq \min(\text{val}(P), \text{val}(Q))$ .
3.   $\text{val}(P \times Q) = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$ .
4.   $\text{val}(k.P) = k.\text{val}(P)$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ .
5.  Si  $Q|P$  alors  $\text{val}(P/Q) = \text{val}(P) - \text{val}(Q)$ .

**Question 18**

1.   $X^4 + X^3 - X^2 - X$  est divisible par  $X(X - 1)$ .
2.  Le reste la division euclidienne de  $X^3 + X^2 + 3$  par  $X - 1$  est  $X + 4$ .
3.  Le quotient de  $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$  par  $X^2 + 1$  est  $X^3 + X + 1$ .
4.   $X - 1$  divise  $X^n - 1$  pour  $n \geq 1$
5.   $X + 1$  divise  $X^n + 1$  pour  $n \geq 1$

**Question 19**

1.  Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .  $X - a$  divise  $P$  ssi  $P(a) = 0$ .
2.  Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré impair. Il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $P(x) = 0$ .
3.  Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , les racines de  $P^2$  sont d'ordre au moins 2.
4.  Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $x$  est racine simple ssi  $P(x) = 0$ .
5.  Un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$  a  $n$  racines réelles.

**Question 20**

1.   $X^4 + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2.   $X^2 + 7$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .
3.   $X^2 + 7$  est irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ .
4.  Dans  $\mathbb{Z}[X]$ ,  $\text{pgcd}(X(X - 1)^2(X^2 + 1), X^2(X - 1)(X^2 - 1)) = X(X - 1)$ .
5.  Dans  $\mathbb{Z}[X]$ ,  $\text{pgcd}(X^4 + X^3 + X^2 + X, X^3 - X^2 - X + 1) = X + 1$ .

## Réels

**Question 21** Réel et rationnels

1.   $(x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$
2.   $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
3.   $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
4.   $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x < z < y)$
5.  Pour  $n \geq 3$ ,  $n$  impair  $\Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

**Question 22** Soient  $A, B, C$  des parties de  $\mathbb{R}$

1.  Si  $\sup A$  existe alors  $\max A$  existe.
2.  Si  $\max A$  existe alors  $\sup A$  existe.
3.  Pour  $A, B$  majorées et  $C \subset A \cap B$  alors  $\sup C \leq \sup A$  et  $\sup C \leq \sup B$ .
4.  Si  $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + 1 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$  alors  $\inf A = 0$  et  $\sup A = 1$ .



5.  Si  $B = \left\{ \frac{E(x)}{x} \mid x > 0 \right\}$  alors  $\inf B = 0$  et  $\sup B = 1$ .

**Question 23** *Limites de suites*

1.  Si  $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  alors  $(u_n)$  tend vers 1.
2.  Si  $u_n = \ln(\ln(n))$  alors  $(u_n)$  a une limite finie.
3.   $u_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$  alors  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .
4.   $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$  alors  $(u_n)$  diverge.
5.   $u_n = \sin(n)$ , il existe une sous-suite de  $(u_n)$  convergente.

**Question 24** *Suites définies par récurrence. Soit  $f(x) = 2x(1-x)$  et la suite définie par  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .*

1.   $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \in [0, 1]$
2.  Quelque soit  $u_0$  dans  $[0, 1]$ ,  $(u_n)$  est monotone.
3.  Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $\ell = 0$  ou  $\ell = 1$ .
4.  Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $\ell = 0$  ou  $\ell = \frac{1}{2}$ .
5.  Si  $u_0 \in ]0, 1[$  alors  $(u_n)$  ne converge pas vers 0.

**Question 25** *Fonctions continues*

1.  La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues est continue.
2.  La fonction  $\sqrt{\sqrt{x}} \ln x$  est prolongeable par continuité en 0.
3.  Il existe  $a, b \geq 0$  tels que fonction définie par  $f(x) = -e^x$  si  $x < 0$  et  $f(x) = ax^2 + b$  si  $x \geq 0$  soit continue.
4.  Toute fonction impaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est continue en 0.
5.  La fonction  $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$  est prolongeable par continuité en 0.

**Question 26** *Théorème des valeurs intermédiaires, fonctions bornées*

1.  La méthode de dichotomie est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires.
2.  Tout polynôme de degré  $\geq 3$  a au moins une racine réelle.
3.  La fonction  $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)}$  admet au moins une racine réelle sur  $] -1, +1[$ .
4.  Pour  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant une limite finie en  $+\infty$ ,  $f$  est bornée.
5.  Pour  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant une limite finie qui vaut  $f(0)$  en  $+\infty$  alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Question 27** *Dérivation*

1.  La fonction  $f(x) = 1/x$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^*$ .
2.  La fonction  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  est continue et dérivable en 0.
3.  La fonction définie par  $x \mapsto 0$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $x \mapsto x^2$  si  $x \notin \mathbb{Q}$  est dérivable en 0.
4.  Si  $f(x) = P(x)e^x$  avec  $P$  un polynôme alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un polynôme  $Q_n$  tel que  $f^{(n)}(x) = Q_n(x)e^x$ .
5.  Si  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$  si  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(0) = 0$  alors  $f$  est dérivable en 0.

**Question 28** *Théorème de Rolle et des accroissements finis*

1.  Si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  avec  $f(a) = f(b)$  il existe un unique  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

2.  Si  $f$  fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .
3.  Soit  $f(x) = \ln x$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ , pour  $x > 0$  il existe  $c \in ]0, x[$  tel que  $\ln x = \frac{x}{c}$ .
4.  Si  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +1$  quand  $x \rightarrow -\infty$  alors il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .
5.   $\forall x > 0 \quad e^x \leq xe^x + 1$

**Question 29** Fonctions usuelles

1.   $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
2.   $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \geq \operatorname{sh} x$
3.   $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4.   $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$
5.   $\operatorname{th}(a + b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

**Question 30** Fonctions réciproques

1.  Une fonction continue  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strictement décroissante est bijective.
2.  Si  $f$  est une fonction continue bijective croissante alors  $f^{-1}$  est croissante.
3.  Si  $f$  est une fonction continue bijective ne s'annulant jamais alors  $(\frac{1}{f})^{-1} = f$ .
4.   $\operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$  pour tout  $x \in [0, 2\pi[$ .
5.  Si  $f(x) = \operatorname{Arctan}(x^2)$  alors  $f'(x) = \frac{1}{1+x^4}$ .

## Primitives usuelles

$C$  désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t + C$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cotan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\int \tan t dt = -\ln |\cos t| + C$$

$$\int \cotan t dt = \ln |\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+\alpha} \right| + C$$

$$\int \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t + C$$

$$\int \operatorname{sh} t dt = \operatorname{ch} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{coth} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2 \operatorname{Arctan} e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{t}{2} \right| + C$$

$$\int \operatorname{th} t dt = \ln (\operatorname{ch} t) + C$$

$$\int \operatorname{coth} t dt = \ln |\operatorname{sh} t| + C$$

## Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

## Fonctions circulaires et hyperboliques

**Propriétés trigonométriques** : remplacer  $\cos$  par  $\text{ch}$  et  $\sin$  par  $i \cdot \text{sh}$ .

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2 \cdot \cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 \cdot \sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin \frac{p + q}{2} \cdot \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p + q}{2} \cdot \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin \frac{p - q}{2} \cdot \cos \frac{p + q}{2}$$

$$\text{ch}(a + b) = \text{ch } a \cdot \text{ch } b + \text{sh } a \cdot \text{sh } b$$

$$\text{ch}(a - b) = \text{ch } a \cdot \text{ch } b - \text{sh } a \cdot \text{sh } b$$

$$\text{sh}(a + b) = \text{sh } a \cdot \text{ch } b + \text{sh } b \cdot \text{ch } a$$

$$\text{sh}(a - b) = \text{sh } a \cdot \text{ch } b - \text{sh } b \cdot \text{ch } a$$

$$\text{th}(a + b) = \frac{\text{th } a + \text{th } b}{1 + \text{th } a \cdot \text{th } b}$$

$$\text{th}(a - b) = \frac{\text{th } a - \text{th } b}{1 - \text{th } a \cdot \text{th } b}$$

$$\begin{aligned} \text{ch } 2a &= 2 \cdot \text{ch}^2 a - 1 \\ &= 1 + 2 \cdot \text{sh}^2 a \\ &= \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a \end{aligned}$$

$$\text{sh } 2a = 2 \cdot \text{sh } a \cdot \text{ch } a$$

$$\text{th } 2a = \frac{2 \text{th } a}{1 + \text{th}^2 a}$$

$$\text{ch } a \cdot \text{ch } b = \frac{1}{2} [\text{ch}(a + b) + \text{ch}(a - b)]$$

$$\text{sh } a \cdot \text{sh } b = \frac{1}{2} [\text{ch}(a + b) - \text{ch}(a - b)]$$

$$\text{sh } a \cdot \text{ch } b = \frac{1}{2} [\text{sh}(a + b) + \text{sh}(a - b)]$$

$$\text{ch } p + \text{ch } q = 2 \cdot \text{ch} \frac{p + q}{2} \cdot \text{ch} \frac{p - q}{2}$$

$$\text{ch } p - \text{ch } q = 2 \cdot \text{sh} \frac{p + q}{2} \cdot \text{sh} \frac{p - q}{2}$$

$$\text{sh } p + \text{sh } q = 2 \cdot \text{sh} \frac{p + q}{2} \cdot \text{ch} \frac{p - q}{2}$$

$$\text{sh } p - \text{sh } q = 2 \cdot \text{sh} \frac{p - q}{2} \cdot \text{ch} \frac{p + q}{2}$$

$$\text{avec } t = \tan \frac{x}{2} \begin{cases} \cos x & = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x & = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x & = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

$$\text{avec } t = \text{th } \frac{x}{2} \begin{cases} \text{ch } x & = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \text{sh } x & = \frac{2t}{1-t^2} \\ \text{th } x & = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

**Dérivées** : la multiplication par  $i$  n'est plus valable

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\sin' x = \cos x$$

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cotan' x = -1 - \cotan^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Arccotan}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{ch}' x = \text{sh } x$$

$$\text{sh}' x = \text{ch } x$$

$$\text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

$$\text{coth}' x = 1 - \text{coth}^2 x = \frac{-1}{\text{sh}^2 x}$$

$$\text{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$\text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{Argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$